# Побољшање ефикасности одлучивања у рударству применом линеарних оптимизационих модела

Трајче Бошевски

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

РУДАРСКО-ГЕОЛОШКИ ФАКУЛТЕТ

Трајче С. Бошевски

# ПОБОЉШАЊЕ ЕФИКАСНОСТИ ОДЛУЧИВАЊА У РУДАРСТВУ ПРИМЕНОМ ЛИНЕАРНИХ ОПТИМИЗАЦИОНИХ МОДЕЛА

Докторска дисертација

Београд, 2021

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF MINING AND GEOLOGY

Trajche S. Boshevski

# IMPROVING DECISION-MAKING EFFICIENCY IN MINING USING LINEAR OPTIMIZATION MODELS

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2021

**Ментор:**

др Игор Миљановић, редовни професор
Ужа научна област: Рачунарство и системско инжењерство
Универзитет у Београду, Рударско-геолошки факултет

**Чланови комисије:**

др Игор Миљановић, редовни професор
Ужа научна област: Рачунарство и системско инжењерство
Универзитет у Београду, Рударско-геолошки факултет

др Зоран Глигорић, редовни професор
Ужа научна област: Експлоатација чврстих минералних сировина и механика стена
Универзитет у Београду, Рударско-геолошки факултет

др Марија Кузмановић, ванредни професор
Ужа научна област: Операциона истраживања
Универзитет у Београду, Факултет организационих наука

**Датум одбране:**

# ПОБОЉШАЊЕ ЕФИКАСНОСТИ ОДЛУЧИВАЊА У РУДАРСТВУ ПРИМЕНОМ ЛИНЕАРНИХ ОПТИМИЗАЦИОНИХ МОДЕЛА


## РЕЗИМЕ

Одлучивање и управљање у рударству је захтеван и сложен задатак изложен ризицима. Конвенционални-искуствени приступи доношења одлука, у пракси често показују слабост која се огледа у недовољној поузданости и прецизности.

Предмет истраживања докторске дисертације, под називом „Побољшање ефикасности одлучивања у рударству применом линеарних оптимизационих модела“ је да, сагледавањем научних метода линеарног програмирања, приступи формирању локацијских модела који би били засновани на анализи и прилагођавању постојећих и увођењу нових претпоставки за случајеве као што је експлоатација и потрошња кречњака.

У дисертацији је приказан линеарни модел локацијске оптимизације експлоатације и потрошње кречњака у Македонији, са 29 производних ентитета – површинских копова, и две опције ентитета потрошње, са 15 и 16 потрошача кречњака. Изменом једне од полазних претпоставки, броја потрошача, истраживање показује да је за потпуно и поуздано сагледавање понашања система неопходан математичко-моделски приступ адекватне осетљивости на промене релевантних параметара. Модел омогућава потпуније и поузданије сагледавање деловања промена релевантних параметара на оптималан циљ, пружа могућност експериментисања мењањем основних претпоставки и усмеравајућег деловања на исход. Ове наводе илуструју и потврђују резултати истраживања изнети у дисертацији.



КЉУЧНЕ РЕЧИ: ОПТИМИЗАЦИЈА, ЛИНЕАРНИ ЛОКАЦИЈСКИ МОДЕЛ, ЛИНЕАРНО ПРОГРАМИРАЊЕ, ЕКСПЛОАТАЦИЈА И ПОТРОШЊА КРЕЧЊАКА, МАКЕДОНИЈА

НАУЧНА ОБЛАСТ: РУДАРСКО ИНЖЕЊЕРСТВО

УЖА НАУЧНА ОБЛАСТ: РАЧУНАРСТВО И СИСТЕМСКО ИНЖЕЊЕРСТВО

УДК: 004:005.7:330:502/.504
004:519.237/.863/.87
553.9:614:622.271/.58:
621.3:622.332/.767
626.86:659:662.7:004:681.3
(043.3)

IMPROVING DECISION-MAKING EFFICIENCY
IN MINING USING LINEAR OPTIMIZATION MODELS

ABSTRACT

Decision-making and management in mining is a demanding and complex task, dealing with risks. Conventional and experiential decision-making approaches, in practice, often show a weakness reflected in insufficient reliability and precision.

The subject of the doctoral dissertation research, entitled "Improving decision-making efficiency in mining using linear optimization models" is by observing the linear programming models to consider the formation of location models that would be based on the analysis and adaptation of the existing as well as the newly introduced assumptions for cases such as limestone exploitation and consumption.

This doctoral dissertation shows the linear model of location exploitation optimization and consumption of limestone in Macedonia, with 29 production entities - open-pit mines, and two options of consumption entities, with 15 and 16 lime consumers. By changing one of the starting hypothesis, the number of consumers, the research shows that mathematical model approach with adequate sensitivity to changes of relative parameters is necessary for a complete and reliable overview of system behavior. The model ensures a more complete and more reliable overview of impact that changes of relevant parameters have on the optimal goal, provides possibilities to experiment by changing the basic hypothesis and the directing effect on the outcome. These hypothesis are illustrated and confirmed by the results in this doctoral dissertation.

KEY WORDS: OPTIMIZATION, LINEAR LOCATION MODEL, LINEAR PROGRAMMING, EXPLOITATION AND CONSUMPTION OF LIMETONE, MACEDONIA

SCIENTIFIC FIELD: MINING ENGINEERING

SCIENTIFIC SUBFIELD: COMPUTING AND SYSTEMS ENGINEERING

UDC: 004:005.7:330:502/.504
004:519.237/.863/.87
553.9:614:622.271/.58:
621.3:622.332/.767
626.86:659:662.7:004:681.3
(043.3)

*ЗАХВАЛНОСТ*

*Велику захвалност дугујем свом ментору проф. др Игору Миљановићу, који ми је, својим широким познавањем линеарног програмирања и операционих истраживања, значајно помогао саветима и идејама током израде дисертације.*

*Посебну захвалност дугујем проф. др Слободану Вујићу, свом ментору са мастер студија рударског инжењерства, врхунском познаваоцу у областима примене системских наука и операционих истраживања у рударству, на консултацијама, корисним саветима, моралној и интелектуалној подршци и помоћи током истраживања.*

*Неизмерно се захваљујем члановима комисије проф. др Зоран Глигорићу и проф. др Марији Кузмановић на корисним и добронамерним сугестијама и примедбама.*

*Својој породици и мојој девојци дугујем бескрајну захвалност на разумевању и подршци ових година.*

*Ову докторску дисертацију посвећујем свом покојном оцу др Стефку Бошевском.*

*Трајче Бошевски*

# САДРЖАЈ

**1. УВОД ..... 1**

1.1 ПРЕДМЕТ ИСТРАЖИВАЊА ..... 1
1.2 НАУЧНИ ЦИЉЕВИ ИСТРАЖИВАЊА ..... 2
1.3 ОСНОВНЕ ПОЛАЗНЕ ПОСТАВКЕ У ИСТРАЖИВАЊИМА ..... 3
1.4 ПРОГРАМ ИСТРАЖИВАЊА ..... 4
1.5 МЕТОДОЛОГИЈА ИСТРАЖИВАЊА ..... 5
1.6 ДОСТИГНУЋА НА ПРЕДМЕТНОМ ПОЉУ У СВЕТУ ..... 6
1.7 ОСТВАРЕНИ РЕЗУЛТАТИ ..... 20

**2. ЛИНЕАРНИ ОПТИМИЗАЦИОНИ МОДЕЛИ ..... 21**

2.1 КРАТКА ИСТОРИЈА ЛИНЕАРНОГ ПРОГРАМИРАЊА ..... 22
2.2 ДЕФИНИЦИЈЕ И ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕ ..... 24
2.3 ГЛАВНЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ ПРОБЛЕМА ..... 26
2.4 ФАЗЕ У РЕШАВАЊУ ПРОБЛЕМА ..... 27
2.5 МЕТОДЕ ЛИНЕАРНОГ ПРОГРАМИРАЊА ..... 29
*2.5.1 Графичка метода ..... 29*
*2.5.2 Симплекс метода ..... 31*
*2.5.3 Данцигов алгоритам ..... 51*
*2.5.4 Дуални проблем ..... 53*
*2.5.5 Транспортна метода ..... 56*
*2.5.6 Метода распоређивања ..... 61*

**3. ОДЛУЧИВАЊА У РУДАРСТВУ ПРИМЕНОМ ЛИНЕАРНИХ МОДЕЛА ..... 62**

**4. ТЕСТ ЕКСПЕРИМЕНТАЛНА ИСТРАЖИВАЊА И АНАЛИЗА РЕЗУЛТАТ ..... 68**

4.1 УВОДНИ ОПИС ТЕСТ ЕКСПЕРИМЕНТАЛНОГ ПРОБЛЕМА ..... 68
4.2 ЕНТИТЕТИ ПРОБЛЕМА ..... 71
4.3 ФОРМАЛНИ МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛ ..... 100
4.4 НУМЕРИЧКИ ЛОКАЦИЈСКИ МОДЕЛ И РЕЗУЛТАТИ ОПТИМИЗАЦИЈЕ ..... 102

**5. ЗАКЉУЧАК ..... 112**

5.1 АНАЛИЗА И ОЦЕНА ..... 112
5.2 ПРЕПОРУКЕ ..... 114

**6. ЛИТЕРАТУРНИ ИЗВОРИ ..... 115**

**БИОГРАФИЈА**

**ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ**

**ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНЕ И ЕЛЕКТРОНСКЕ ВЕРЗИЈЕ ДОКТОРСКОГ РАДА**

**ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ**

# 1. УВОД

## 1.1 ПРЕДМЕТ ИСТРАЖИВАЊА

Одлучивање и управљање у рударству у принципу је захтеван и сложен задатак изложен ризицима. Добра одлука није увек услов за добар резултат. Конвенционални-искуствени приступи доношења одлука, у пракси често показују слабост која се огледа у недовољној поузданости и прецизности. Функционално специјализовани математичко-моделски алати из фамилије метода операционих истраживања, ове недостатке немају уз претпоставку адекватног избора и правилног поступка у примени одговарајуће методе за подршку одлучивању**.**

Сваки дан се суочавамо са потребом да донесемо одлуку. Одлуке су често једноставне и брзе, али постоје одлуке које захтевају више времена, ресурса, информација и алтернатива. Доношење одлука је поступак избора између скупа алтернатива. Сваки поступак доношења одлуке даје резултат који може бити акција, препорука или мишљење. Ефикасност представља постизање максималног учинка користећи минималне ресурсе.

Врло је битно одлуке донети на бази научних метода, особено методама линеарног програмирања, који дају многу боље технолошке, техничке и економске ефекте, него што би се добили њиховом занемаривањем. Ово је разлог више који оправдава практичну примену и говори о неопходности њиховог коришћења у процесу практичног одлучивања [90].

Са развојем индустрије, проблеми се повећавају. Трошкови, који нагло расту, представљају огроман изазов који се мора стабилизовати и довести до нивоа оптималности. У рударству се често сусрећемо са сложеним проблемима различите природе, где интуиција и искуство нису увек услов за доношење исправне одлуке. Честе финансијске кризе су додатни разлог за примену метода и модела који ће побољшати ефикасност одлучивања, не само у рударству, већ и у другим индустријама.

Предвиђање последица промена у систему као што је систем експлоатације и потрошње кречњака, проблем је који захтева одговарајући аналитички приступ који обухвата све ограничавајуће факторе, њихова деловања, зависности, пожељне и непожељне промене, и испуњење постављеног циља или више циљева. Без формирања математичког модела и примене одговарајуће методе за решавање, није могуће решење проблема на оптималном нивоу.

Предмет истраживања докторске дисертације, под називом „Побољшање ефикасности одлучивања у рударству применом линеарних оптимизационих модела“ је да сагледавањем научних метода линеарног програмирања приступи формирању локацијских модела који би били засновани на анализи и прилагођавању постојећих и увођењу нових претпоставки за случајеве као што је експлоатација и потрошња кречњака.

## 1.2 НАУЧНИ ЦИЉЕВИ ИСТРАЖИВАЊА

Доношење управљачких одлука у експлоатацији минералних сировина у принципу подразумева сагледавање, аналитичку интеграцију и сагледавање функционалних утицаја бројних чинилаца, понекад међусобно супротстављених, као што су: природни услови (геолошки, инжењерскогеолошки, хидрогеолошки, хидролошки, климатски и др.) тржишно-економски (берзански), технички, технолошки, комуникациони, урбанистички, еколошки, социолошки, политички и др. Одлучивање и управљање у рударству без обзира на хијерархијску степенитост и различитост која из тога произилази, циљно је усмерено на производњу, са исходним ефектима исказаним економиком пословања рудника, безбедношћу рада и поузданошћу производње. С обзиром да су рудници у принципу прве карике у производним ланцима, аналогно фисији у физици, ефекти рада рудника преносе се на карике које у ланцу следе (на пример: рудник кречњака → фабрика за производњу хидратисаног креча → потрошња креча). Очигледно је да се рефлексија управљачких одлука у рудницима прелива на све ентитете у производном ланцу који следе, што упућује на став о последичној повезаности и преференцији одлучивања на нивоу рудника.

Да би одлучивање и управљање било ефикасно, мора бити успостављен надзор над свим интерним и екстерним чиниоцима битним за доношење одлука, јасна слика њихових узрочно-последичних веза, потенцијалних ризика и адекватан приступ за подршку одлучивању. Овако посматрано, одлучивање спреже у целину: аквизицију релевантних података и информација у реалном и проширеном времену, документацију, правила и процедуре доношења одлука.

У том смислу, идентификовани су следећи циљеви истраживања у оквиру докторске дисертације: сагледавање оствареног на пољу примене линеарних оптимизационих модела као приступа за подршку одлучивању у рударству, анализа проблемско (тематски) оријентисаних могућности и ограничења примене линеарних оптимизационих модела у рударству, тест-експериментална истраживања линеарних модела за подршку одлучивању и оцена практичних ефеката.

## 1.3 ОСНОВНЕ ПОЛАЗНЕ ПОСТАВКЕ У ИСТРАЖИВАЊИМА

Увидом и анализом литературних извора приметна је бројност радова научног и стручног карактера о линеарним оптимизационим методама и њиховим применама у различитим сферама. Међутим, супротно очекивању, исходни закључак ове анализе је да ефикасност одлучивања у рудницима уз подршку линеарних оптимизационих метода није истражена примерено апликативној подесности ових метода. Ово је иницирало тему и утицало на дефинисање концепције истраживања у оквиру дисертације.

Основне полазне поставке за истраживања у оквиру дисертације су:

1. Недовољна сагледаност примењивости линеарних оптимизационих метода за подршку одлучивању у рударство;

2. Отвореност питања ефеката и ефикасности примене линеарних оптимизационих модела при доношењу управљачких одлука; и
3. Непостојање препоручљивог алгоритма и критеријума примене ових модела за подршку одлучивању у рударству.

## 1.4 ПРОГРАМ ИСТРАЖИВАЊА

На основу садашњег сагледавања опсега проблема, планира се да се истраживања у оквиру докторске дисертације одвијају у две фазе: теоријска истраживања и практичне провере.

- Прва фаза треба да сагледа, отвори и детерминише проблем и постави алгоритам примене линеарних оптимизационих модела код подршке одлучивања у рударству,
- У другој фази на конкретним рудничким проблемима, обавиће се тест-експериментална истраживања и оценити ефекти или потенцијални ефекти примене линеарних оптимизационих модела у одлучивању.

Програм истраживања обухвата активности:

1. Идентификација проблема,
2. Сагледавање искуства у рударству на предметном пољу,
3. Оцена постојећих искустава са предлогом поступка даљих истраживања,
4. Избор рудничких проблема мериторних за истраживања примењивости линеарних оптимизационих модела код подршке одлучивања у рударству,
5. Тест експериментална истраживања и анализа резултата,
6. Запажања са предлогом даљих истраживања.

Сазнања у току истраживања могу утицати да се у извесној мери одступи од планираних активности.

## 1.5 МЕТОДОЛОГИЈА ИСТРАЖИВАЊА

Методологија истраживања, прилагођена проблему, програму и циљевима истраживања у оквиру дисертације, обухвата: проучавање постојећих искуства и сазнања анализом литературних и других расположивих извора информација. Закључивање засновано на претходним сазнањима и дефинисање „пловног“ курса даљих истраживања, избор рудничких проблема мериторних за тест-експериментална истраживања, експериментална истраживања, завршну оцену и закључак. Дакле, у основи методологија истраживања комбинује и спаја теоријска и опитна истраживања.

У првој фази рада спроведено је свеобухватно истраживање проблема линеарног програмирања. Методе које се највише примењују у линеарном програмирању описане су на практичан и једноставан начин.

У другој фази направљен је преглед проблема ефикасности одлучивања и управљања и могућности побољшања у рударству.

У трећој фази рада извршено је тест-експериментално истраживање, формиран је локацијски модел и на основу тога направљен је оптималан план експлоатације и потрошње кречњака.

У четвртој фази рада дата је завршна анализа и оцена.

## 1.6 ДОСТИГНУЋА НА ПРЕДМЕТНОМ ПОЉУ У СВЕТУ

У овом дигиталном добу, интернет је сјајан извор за добијање информација о достигнућима у предметном пољу у свету. Претраживањем на интернету на кључне речи назива дисертације „побољшање, ефикасност, одлучивање, рударство, линеарно програмирање, оптимизација, модел“ добијено је 1.760 резултата.

Из добијених резултата могу се издвојити:

- Vujić S., Ćirović G., **Production planning in mines using fuzzy linear programming**, Yugoslav Journal of Operations Research, 1996.

  *Циљ овог рада је приказ оптимизације производње у пракси на примеру површинских копова боксита где је коришћено фази линеарно програмирање пратећи критеријум по приходу. Променљиве у критеријумској функцији су лингвистичке променљиве, док су и променљиве и ограничења променљивих представљени троугластим фази бројевима. Израз „задовољавајући приход“ је представљен троугластим фази бројевима уместо „максимизирања прихода“. Пример илуструје како се одређени проблеми стварних производних система могу третирати теоријом о фази скуповима.*

- Radosavljević, M., Vujić, S., et al., **Single-Phase Linear Model of Optimum Supply Limestone Thermal Power Plants From the Quarry of Serbia**, Journal of Mining Science, Springer, Vol. 52, No. 4, 2016

  *У раду је представљен једнофазни локациони модел као подршка процесу доношења одлука и снабдевању кречњака термоенергетским системом Електропривреде Србије. Усклађивање рада термоенергетских постројења са законодавством и нормативном регулативом у циљу заштите ваздуха од емисије загађујућих материја укључује анализу могућности снабдевања термоенергетских постројења кречњаком који ће се користити као редукционо средство у диму процес одсумпоравања гаса. Изузев квалитета минералних сировина као обавезног услова који треба да буде задовољен, снабдевање термоенергетских постројења кречњаком је у основи локацијски проблем, односно проблем одабира рудника са циљем постизања најнижих могућих трошкова испоруке.*

- Худеј М., **Мултиваријабилни модели управљана у рударству**, Докторска дисертација, Универзитет у Београду, Рударско-геолошки факултет, Београд, 2013.

  *У дисертацији М. Худеја истраживања су усмерена критичким ставом према приступима заснованим на избору најбољег модела за анализу доношење управљачких одлука у рудничким условима. Уместо избора најбољег, најпогоднијег или најприкладнијег модела за подршку одлучивању, предлаже се процедурални прилаз. Овакав прилаз подразумева истовремено укључивање у анализи више модела са коректном апроксимацијом мултиваријабилних рудничких услова. Пошто циљ није избор најбољег модела већ најбољег решења задатог проблема, према постављеном алгоритму поступак избора најбоље ранггиране алтернативе или најбољег поретка алтернатива, зависи од колебања мултимоделских рангова. У случају еквиваленције мултимоделских рангова, формирани поредак алтернатива прихвата се као дефинитиван, у супротном коначни поредак алтернатива дефинише се пондерисањем. Ако је циљ најбоља алтернатива, анализа је опциона зависно од степена еквиваленције мултимоделских рангова.*

- Стевановић Д., **Оптимизација и планирање површинских копова стохастичким моделима**, Докторска дисертација, Универзитет у Београду, Рударско-геолошки факултет, Београд, 2015.

  *У овој дисертацији анализира се употреба стохастичких математичких модела, у процесима планирања и оптимизације на површинским коповима. Научни методама доказане су предности имплементације стохастичког или комбинованог стохастичког и детерминистичког приступа над чисто детерминистичким приступом. У дисертацији су развијена два модела, први се заснива на генетским алгоритмима и третира проблем планирања производње на површинском копу лигнита, други модел је хибридног типа, садржи стохастичку и детерминистичку компоненту и третира проблем оптимизације граница копа.*

- Дедовић Н., Матић-Кекић Снежана, Томић М., Савин Л., Симикић М., **Примена линеарног програмирања на проблем локације ремонтних центара**, Савремена пољопривредна техника, 2014.

  *У раду су представљени математички модели који решавају локацијски проблем на путној мрежи са 59 насеља (чворова). Циљ је да се одреди локација ремонтних центара, а да се минимизује тежинско растојање између потенцијалних клијената и центара. Упоређено је целобројно решење са решењем када нема таквог захтева и то у следећим случајевима:*

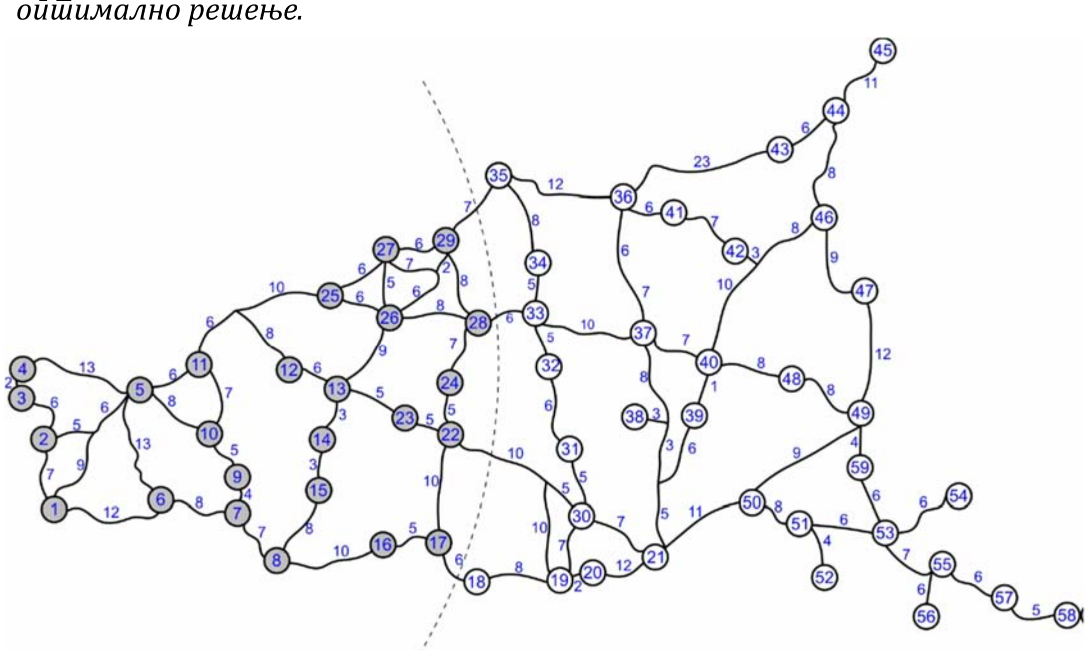
  *а) сви клијенти морају бити потпуно услужени;*

  *б) ремонтни капацитети не смеју бити премашени;*

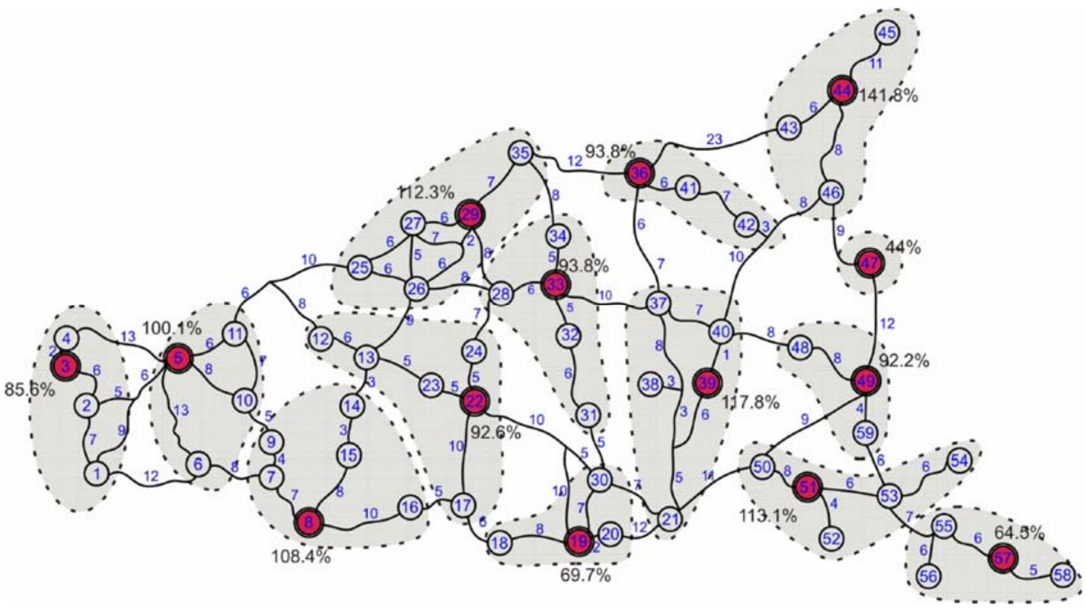
  *ц) сваки ремонтни центар мора да ради са бар 75% капацитета;*

  *д) дозвољено је да клијенти из истог насеља буду услужени у различитим ремонтним центрима.*

  *Претпостављено је да су сви ремонтни центри опремљени истом опремом и да су познате потребе клијената за сервисом. Целобројно решење је увек давало већу вредност функције циља. За 50 произвољних избора 14 ремонтних центара на мрежи од 59 насеља, вредност просечне функције циља је више од два пута била већа од вредности функције циља при оптималном решењу. На слици 1.1 приказана је путна мрежа са растојања, док је на слици 1.2 приказано оптимално решење.*



*Слика 1.1 Путна мрежа са растојањима [18]*



*Слика 1.2 Оптимално решење модела [18]*

- Црногорац М., **Оптимизација избора механичке методе експлоатације нафтних бушотина применом фази логике**, Докторска дисертација, Универзитет у Београду, Рударско-геолошки факултет, Београд, 2020.

*Аутор је у дисертацији као математички и концепцијски модел за оптимизацију користио фази логички модел. Као функција циља је уведена перформанса употребљивости. Исходи, односно „IF-THEN“ правила су формирани на бази искуства са више експлоатационих поља у свету. Резултати су приказани на два начина, зависно од могућности интерпретације. Први начин приказа резултата дат је кроз дијаграме на којима су површине неправилних геометријских тела. Поређењем преклапања површине нове бушотине са претходно добијеним површинама појединачних механичких метода добија се проценат примењивости одређене методе на новој бушотини. Када постоје мале разлике у излазима, примењује се други начин тако што се претходно добијеним површинама одређује тежиште и расипање резултата. На крају је дата анализа осетљивости развијеног модела.*

- Dejanović P., Perić T., **Primjena fuzzy višekriterijskog linearnog programiranja u rješavanju problema optimizacije plana proizvodnje i tehnoloških varijanti**, Zbornik Ekonomskog fakulteta u Zagrebu, Vol. 17 No. 2, 2019.

  *Аутори истражују ефикасност примене методологије фази вишекритеријумског линеарног програмирања за решавање вишекритеријумског проблема оптимизације производног плана и технолошких варијанти у предузећу које се бави производњом металних производа. Представљен је теоријски модел и његово решење, као и метода која се примењује за решавање специфичног проблема оптимизације производног плана и технолошких варијанти у предузећу које се бави производњом металних производа. Добијени резултати указују на могућност ефикасне примене ове методе у решавању одређеног проблема и њене предности у односу на примену неких других метода.*

У оквиру осталих резултата не региструју се релевантна истраживања и публикације из региона на ову тему.

Тражењем истих кључних речи, али на енглеском језику „improving, efficiency, decision making, mining, linear programming, optimization, model" добијено је знатно више резултата, односно преко 20.000.000 резултата. Поред алатке претраживања, у потрази достигнућа на предметном пољу у свету коришћене су веб странице реномираних међународних часописа из области рударства, као што су Journal of Mining Science, Archives of Mining Sciences, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences и др.

Генерално, резултати се односе на побољшање енергетске ефикасности у рударству, смањење трошкова, побољшање животне средине и оптимизацију производње и продуктивности. Постоји неколико радова о методама оптимизације у рударству. Вреди поменути они који су оставили бољи утисак и који су актуелни у овој теми:

- Kazakidis V., Mayer Z., Scoble M.J., **Decision making using the analytic hierarchy process in mining engineering**, Transactions of the Institution of Mining and Metallurgy, Section A: Mining Technology, 2004.

  *Овај рад представља серију случајева у различитим сценаријима рударства како би се демонстрирала примена аналитичког хијерархијског процеса (АХП). Аутори су истакли да су искуство и интуиција били кључни за доношење одлука због честог недостатка квантитативних података, укључујући геологију, степенасту дистрибуцију и услове тла, као и еколошких, социјалних и економских фактора. Квалитативна анализа заснива се првенствено на суду, знању и искуству једног или више стручњака. У случајевима када су доступне ограничене информације, субјективне вероватноће, засноване на општем професионалном искуству, знању и мишљењу стручњака, могу бити основа за анализу. Такође су представљене методологија за квалитативно одлучивање помоћу математичке анализе аналитичког хијерархијског процеса и анализа осетљивости. Рударски сценарији за демонстрацију примене аналитичког хијерархијског процеса односе се на: инвестициону анализу нове технологије; дизајн система тунела; процена ризика од планирања копова итд. Аутори дају преглед методологије за квалитативно доношење одлука на основу теренских апликација. Метода аналитички хијерархијски процес показала се ефикасним алатом у моделирању широког спектра рударских сценарија, укључујући одабир алтернатива, процену утицаја одлуке, спровођење анализе пројектног ризика, одређивање локације и испитивање сценарија „шта ако“ путем анализа осетљивости. Омогућила је прикупљање искустава и мишљења стручњака за структурирање модела одлучивања и потврђивање резултата.*

- Amankwah H., **Mathematical Optimization Models and Methods for Open-Pit Mining**, PhD dissertation, Department of Mathematics, Linköping University, Linköping, 2011.

  *У овој тези аутор проучава проблем пројектовања површинских копова, проблем планирања површинских копова и проблем дизајнирања површинских копова са геолошком и ценовном неизвесношћу.*

- Rubito, E., **Mill feed optimization for multiple processing facilities using integer linear programming**, Proceedings of the fifteen international symposium on mine planning and equipment selection, Turin, Italy, 2007.

  *Овај рад говори о развоју алгоритма за расподелу руде произведене из површинског копа у два млина са различитим поставкама. Алокација руде врши се преко целобројног линеарног алгоритма који узима у обзир мељивост стена, литологију, степене и економске параметре. Други алгоритам се састоји од увођења линеарног односа у циљну функцију ради обрачуна потенцијалних производних сценарија коришћењем променљиве пропусности.*

- Ercelebi, S. G., & Bascetin, A., **Optimization of shovel-truck system for surface mining**, Journal of The South African Institute of Mining and Metallurgy, 2009.

  *Овај рад описује моделе рада утовар-транспорт и оптимизационе приступе а алокацији и отпреми камиона под различитим радним условима. Теорија затворене мреже редова чекања користи се за алокацију камиона и линеарно програмирање у сврху слања камиона на утовар. Овај приступ би пружио могућност процене мера перформанси система (средњи број камиона, средње време чекања итд.) за потребе планирања када се возни парк састоји од идентичних камиона. Представљена је рачунска студија која показује како избор оптималног броја камиона и оптималне политике отпреме утичу на трошкове премештања материјала у систему утовара.*

- J.A. de Carvalho Junior, Koppe J.C., and Costa J.F.C.L.**, A case study application of linear programming and simulation to mine planning**, J. S. Afr. Inst. Min. Metall. vol.112 n.6 Johannesburg, 2012.

  *Резултати добијени у овом раду анализирају утицај неизвесности у вези са улазним параметрима у оптимизацији рударских модела. Кроз реалан пример развијен је математички модел који описује процес производње угља кроз системе ископавања, прераде и пласмана угља. Оптимизација овог модела урађена је уз помоћ линеарног програмирања. Анализа добијених резултата омогућила је процену ризика повезаног са најбољим решењем због несигурности улазних параметара. Резултати добијени преко алата математичког* *моделирања, оптимизације помоћу линеарног програмирања и анализе ризика сугеришу да се финансијски добици могу добити коришћењем ових техника у планирању рудника. Помоћу ових алата, доносилац одлука може да изврши евалуацију низа избора и хипотеза у вези са производним процесом, а након тога повољно предложи структурне промене у процесу како би се створио већи профит. На крају аутори закључују да коришћење симулационих техника пружа могућност квантификовања утицаја који стохастички параметри производе у оптималном одзиву. Стохастички приступ проширује распон информација доступних доносиоцу одлуке, омогућавајући процену ризика од датог резултата.*

- Gamache, M., Hebert-Desgroseilliers, L., & Desaulniers, G.. **A generic linear program for an optimal mine production plan**, Mining Planning and Equipment Selection Conference, 2009.

  *У овом раду аутори предлажу генерички модел заснован на линеарном програмирању који омогућава израдњу оптималног производног плана за радну смену у површинском копу. Линеарни програм узима у обзир различите групе ограничења као што су карактеристике мешања на дробилици, капацитет опреме, количина расположивог материјала у изворима, капацитет возног парка камиона итд. У раду се ставља нагласак на апроксимација и линеаризација скупа ограничења која израчунава време чекања камиона на сервисним местима.*

- Eivazy H.; Askari-Nasab H., **A hierarchical open-pit mine production scheduling optimisation model**, International Journal of Mining and Mineral Engineering, 2012.

  *У овом раду приказана је хијерархијска методологија распореда производње површинских копова која повезује оптимални стратешки план површинских копова са оптималним средњорочним распоредом производње. Главни циљ овог рада је развијање, примена и верификација математичког програмског оквира за оптимално средњорочно планирање производње отворених копова коришћењем мешовитог целобројног линеарног програмирања. Циљ средњорочног распореда производње рудника је минимизирати оперативне трошкове, укључујући трошкове санације, прераде, рударства, превоза и* *поновног руковања отпадом. Да би се верификовао предложени хијерархијски модел, представљена је студија случаја руде гвожђа. Резултати се тумаче и анализирају како би се верификовала применљивост модела у погледу рударске праксе. Главни доприноси средњорочног модела оптимизације распореда производње су: моделирање више дестинација, укључујући залихе, прерађивачке погоне и депоније отпада; доношење одлуке о одабиру рута / рампи ради смањења трошкова превоза; и моделирање залиха помоћу коришћењем мешовитог целобројног линеарног програмирања.*

- Gurgur, C. Z., Dagdelen, K., & Artittong, S., **Optimisation of a real-time multi-period truck dispatching system in mining operations**, International Journal of Applied Decision Sciences, 2011.

  *У овом раду развијен је модел линеарног програмирања за распоред рада камиона и коришћен заједно са постојећим моделом мешовитог целобројног програмирања за краткорочно и дугорочно рударско планирање. Аутори су тестирали модел линеарног програмирања и истовремено и интерактивно покренули са мешовитим модел целобројног програмирања за решавање проблема алокације камиона. Предложени приступ расподеле камиона превазилази недостатке постојећих модела узимајући у обзир економске параметре, више временских периода и несигурност времена утовара и путовања и разреда руде.*

- Ta C.H., Ingolfsson A., Doucette J., **A linear model for surface mining haul truck allocation incorporating shovel idle probabilities**, European Journal of Operational Research, Volume 231, Issue 3, 2013.

  *Ова група аутора је у свом раду представила моделе камиона и багера са висинском кашиком у површинским коповима нафтног песка. Модели су формулисани тако да минимизирају број камиона за дати скуп багера, подложно ограничењу протока и квалитет руде. Преко квантификација и валидација нелинеарне везе између вероватноће неискоришћености багера (која одређује продуктивност багера) и броја камиона додељено багера са једноставним приближавањем. Аутори користе линеаризацију да би се овај* *израз уградио у линеарне целобројне програме. Претпостављају да је у њиховом моделу сваки багер је додељена једна величина камиона и истичу како се може приближно израчунати више величина камиона по багеру.*

- Askari-Nasab H., Upadhyay S. P., Torkamani E., Tabesh M., Badiozamani M.M., **Simulation Optimisation of Mine Operational Plans**, Orebody Modelling and Strategic Mine Planning Symposium, Perth, WA Australia, 2014.

  *У овом раду аутори представљају две главне компоненте моделирања као средства за постизање оперативних планова блиских оптималним. Модел линеарног програмирања са мешовитим целобројним циљем за алокацију радног простора камионима и багерима по сменама тако да се оперативни трошкови сведу на минимум, а максимизира искоришћење ресурса и модел симулације дискретних догађаја за испитивање понашања транспортног система камиона и багера у присуству несигурности у рударским операцијама. Циљеви су максимизирање продукције, минимизирање одступања од циљне класе руде, минимизирање оперативних трошкова. Математички модел посматра задатке багера и циљну производњу као улаз у модел симулације дискретних догађаја, истовремено испуњавајући жељене циљеве и ограничења рударске операције. Главни допринос овог рада је развој, примена и верификација симулационог модела са везом до оптималног краткорочног распореда ископавања рударских површина, што помаже у постизању високог нивоа усклађености минског плана кроз краткорочно и временско оперативног планирања.*

- Sofranko M., **Optimizing Transport in Surface Mines, Taking into Account the Quality of Extracted Raw Ore**, Acta Montanistica Slovaca, 2012.

  *Овај рад се бави проблематиком одговарајућег одвајања транспортних механизама за рударство минерала са појединих територија. Представљен је модел решења уз употребу посебно развијеног програма за оптимизацију транспорта, узимајући у обзир потребан квалитет вађене сирове руде. Оптимизација транспорта врши се методом линеарног програмирања.*

- Mahrous A., Hyung S. Y., **Transportation problem: A special case for linear programing problems in mining engineering**, International Journal of Mining Science and Technology, 2012.

  *У овом раду је предложена метода за минимизирање трошкова превоза. Такође се утврђују трошкови снабдевања и транспорта по јединици количине. Ова студија је спроведена да би се проценио квалитет шљунка како би се утврдила његова погодност за бетонски и асфалтни агрегат.*

- Faraji R., **A comparison between linear programming and simulation models for a dispacthing system in open pit mines**, Département de mathématiques et de génie industriel, 2013.

  *Ово истраживање се бави врло краткорочним производним планом система камиона-багера у површинским коповима. Циљеви овог истраживања су развити и применити основни симулациони модел узимајући у обзир ред и време чекања камиона код багера и дробилица на основу резултата модела линеарног програмирања у детерминистичким и у стохастичким ситуацијама, такође развити, применити и верификовати други симулациони модел који је систем контроле у реалном времену.*

- Van der Lingen E., **Outsourcing in the mining industry: Decision making framework and critical success factors**, Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy, 2014.

  *Аутор овог рада истиче да главни покретач одлуке о набавци рударских операција треба да се разликује од компаније до компаније, а од компаније до пројекта од пројекта до пројекта, али у стварности се често односи на трошкове. Истраживање потврђује да постоји низ фактора, укључујући трошкове, које треба узети у обзир приликом одабира између сопственог и препуштеног рударства. Иако литература обилује факторима које треба размотрити, постоји мало података о томе како их применити у пракси и релативном значају различитих фактора које треба узети у обзир. Развијен је оквир за доношење одлука у оквиру процедура додељивања услуга везаних за рударске радове. Такође су утврђени су критични фактори успеха којих се* *треба придржавати уколико се одабере препуштено рударство. Истраживање је показало да извршавање рударских активности није суштинска надлежност посматране рударске компаније. Развијен је оквир за доношење одлука користећи структуру победника / квалификатора налога, која се може користити за олакшавање одлуке о извору рударства. Према студији критичних фактора успеха, најважнији алати који су на располагању тиму власника рудника за управљање рударима извођачима радова су социјални и механизми контроле излаза.*

- Tabesh, M., Mieth, C., and Askari–Nasab, H., **A multi–step approach to long–term open–pit production planning**, International Journal of Mining and Mineral Engineering, 2014.

  *У овом раду аутори су развили, верификовали и представили методологију у више корака за три међусобно повезане кључне компоненте планирања површинских копа: контролисани оптимални фазни дизајн, карактеризација селективних рударских јединица и дугорочна оптимизација распореда производње. Приказана је методологија хибридног решења за фазно пројектовање, користећи целобројно програмирање и хеуристику локалног претраживања. Даље је представљен хијерархијски приступ кластерисању са контролом величине и облика, који агрегира блокове у полигоне за откопавање ограничене у границама одбијања; и на крају, уведен је математички модел мешовитог целобројног линеарног програмирања, који користи генерисане повратне реакције и агрегате као јединице за планирање за пружање практичних распореда живота у руднику блиских оптималним. Поред тога, модел суштински решава проблем оптимизације граничних вредности.*

- Swain A., **Application of Linear Programming in Mine Systems Optimization**, Mine Systems Engineering, 2016.

  *Овај рад приказује подручје примене линеарног програмирања у рударској индустрији као што је мешање руда и распоред производње, транспортне проблеме, проблеме везани са задатке, оптимизација и управљање залихама, пројектни менаџмент и још много тога. Рад истиче изузетан значај линеарног програмирања у рударској индустрији, посебно у оптимизацији система,* *повећању продуктивности, смањењу трошкова и повећању профитабилности, такође помаже у сузбијању непредвиђених услова услед тржишне флуктуације потражње и понуде.*

- Komljenovic D., Abdul-Nour G., Popovic N., **An approach for strategic planning and asset management in the mining industry in the context of business and operational complexity**, International Journal of Mining and Mineral Engineering, 2015.

  *Овај рад предлаже нови приступ у стратешком планирању и управљању имовином рударских предузећа анализирајући их као сложене адаптивне системе. Методе системских наука могу помоћи да се боље разуме сложено окружење рударских организација пружајући реалније разумевање о њему. Аутори сматрају да би они могли бити корисни у дизајнирању побољшаног оквира за доношење одлука о стратешком управљању имовином. У раду се такође разматрају предности, изазови, као и препоручена будућа истраживања и примена у рударству.*

- Patterson S.R., Kozan E., Hyland P., **An integrated model of an open-pit coal mine: improving energy efficiency decisions**, International Journal of Production Research, Volume 54, 2016 - Issue 14, 2016.

  *Аутори овог рада дају оригинални интегрисани модел површинског копа угља за подршку енергетски ефикасним одлукама. Користили су мешовито целобројно линеарно програмирање да би формулисали општи интегрисани модел оперативне потрошње енергије четири уобичајена подсистема за експлоатацију угља: ископ и транспорт, залихе, прерађивачка постројења и тракасти транспортери. Рудници су представљени као повезане инстанце четири подсистема, на начин протока, који се затим прилагођавају подацима које пружају оператери рудника. Решење интегрисаног модела осигурава синхронизацију рада подсистема и подстиче енергетску ефикасност целог рудника. Представљене су могућности за употребу модела за помоћ у енергетски ефикасном доношењу одлука на различитим нивоима рудника.*

- Shishvan M.S., Benndorf J., **Operational Decision Support for Material Management in Continuous Mining Systems: From Simulation Concept to Practical Full-Scale Implementations**, Minerals, 2017.

  *Овај рад представља проширење развијеног стохастичког симулационог модела аутора од концептуалне фазе до новог нивоа технолошке спремности применом у индустријски релевантном окружењу. Детаљно је представљен оквир за моделирање, симулацију и валидацију симулационог модела примењеног на два велика рудника лигнита. Разматрају се питања оперативне имплементације, искуства и изазови у практичној примени. Даље, демонстрирана је снага примене симулационог моделирања као подршке оперативним одлукама за управљање материјалом у рударству угља. Резултати студија случаја користе се за описивање детаља оквира и илустрацију снаге и ограничења његове примене.*

- Sitorus F., Cilliers J.J., Brito-Parada P.R., **Multi-criteria decision making for the choice problem in mining and mineral processing: Applications and trends**, Expert Systems with Applications, Elsevier Ltd., 2018.

  *Овај рад пружа свеобухватан преглед примена, трендова и потенцијала вишекритеријумског одлучивања за решавање различитих проблема у индустрију рударства и прерада минералних сировина. Рад даје увид у тренутно стање примене вишекритеријумског одлучивања у рударству и припреми минералних сировина и даје смернице будућих праваца истраживања у развоју метода вишекритеријумског одлучивања које би користиле овим пољима.*

- Moradi-Afrapoli A.; Askari-Nasab H., **A stochastic integrated simulation and mixed integer linear programming optimisation framework for truck dispatching problem in surface mines**, International Journal of Mining and Mineral Engineering, 2020.

  *Аутори су развили интегрисани оквир за симулацију и оптимизацију за решавање диспечерских проблема камиона у површинским коповима. Развијени оквир користи симулационо моделирање да имитира рударске операције и* *ухвати техничке несигурности. Такође примењује моделирање мешовитом целобројном линеарном оптимизацијом засновано на несигурности за отпрему камиона уз хватање практичних несигурности. Развијени модел оптимизације истовремено оптимизује искоришћење возног парка камиона, искоришћеност утоварне флоте и стопу храњења постројења. Модел разматра стохастичку природу диспечерских параметара и укључује неизвесности у времену путовања у поступак доношења одлука. Поређење примене развијеног модела оптимизације са тренутним моделом оптимизације тржишта који користи развијени интегрисани оквир за симулацију и оптимизацију показало је побољшање у производњи студије случаја за 11%.*

На основу горе наведених радова може се закључити да је оптимизација рударских процеса један од главних изазова у свету. Побољшање доношења одлука у рударству је од велике важности и изазива велико интересовање у пословном сектору. Ово је доказ да теме побољшање ефикасност одлучивања и примене методе оптимизације су актуелне и релевантне с обзиром на то да могу много помоћи у ово доба изазова.

## 1.7 ОСТВАРЕНИ РЕЗУЛТАТИ

У научном и стручном погледу тему докторске дисертације карактерише актуелност и важност за рударство. Остварене су две категорије резултата:

- Резултати теоријског карактера; и
- Резултати примењеног - исходног карактера за оценама важним за рударство па и шире.

Теоријска истраживања модела линеарне оптимизације потврдила су његову примену у рударству, посебно за доношење ефикасне одлуке. Развијени модел је флексибилан и може се применити у неколико области у рударству, али и у другим секторима и индустријама.

# 2. ЛИНЕАРНИ ОПТИМИЗАЦИОНИ МОДЕЛИ

Постоје разни оптимизациони модели и алати у области математичког програмирања који могу бити од помоћи у побољшању ефикасности одлучивања. Међу највише примењене, најизучаваније и најзначајније методе у овој проблематици спада линеарно програмирање. Разлог је широко подручје примене, прилагодљивост и једноставност реализације.

Реч линеарно указује на то да су изводљиви планови ограничени линеарним ограничењима (једнакостима и/или неједнакостима), као и да се квалитет плана (нпр. трошкови или трајање) такође мери линеарном функцијом разматраних величина. Линеарно програмирање користи се за планирање свих врста економских активности, попут транспорта сировина и производа међу фабрикама, сечења ролни папира на разне величине по наруџби купаца и слично. Израз „планирање са линеарним ограничењима“ можда би боље обухватио ово изворно значење линеарног програмирања. Међутим, појам линеарног програмирања је добро успостављен већ дуги низ година, а истовремено јесте стекао је знатно шире значење: не само да игра улогу само у математичкој економији, већ се често појављује у рачунарству и у многим другим областима [53].

## 2.1 КРАТКА ИСТОРИЈА ЛИНЕАРНОГ ПРОГРАМИРАЊА

Као научна дисциплина, термин линеарно програмирање је први пут представљено у току Другог светског рата са циљем смањивања војних трошкова и повећања ефикасности на ратиштима. Тада реч програмирање је био војни термин који се односио на планови или распоред обуке, логистичко снабдевање и сл.

Према R. Ferguson и L. Sargent основе линеарног програмирања су настале знатно раније. Они сматрају да се линеарно програмирање сусреће први пут у радовима L. Walras у 1874 год. јер је формирао ограничења у форми линеарних једначина [27].

D. Judin и E. Golshtein сматрају да се линеарно програмирање појавило тридесетих година 20-тог века, јер је постојање критеријумске функције, поред ограничавајућих фактора, основно својство линеарног програмирања, што недостаје у радовима L. Walras [36]. Они везују настанак линеарног програмирања за чланак мађарског математичара J. Egervary, који је објављен 1931. год. и који садржи теорему на бази које је постављена метода распоређивања. Дефинисање ове теореме је започео, такође, мађарски математичар Dénes Kőnig 1916. год, тако да се метода распоређивања често назива мађарском методом [36].

Већина аутора и научника сматра да се линеарно програмирање појавило 1939. год. када је совјетски математичар и економист Leonid V. Kantorovich објавио књигу „Математички методи у организацији и планирању производње”. У књизи су предложене методе за проналажење решења неких техничко-економских проблема, као што су најрационалнија расподела послова на машине, сечење материјала уз најнижи отпадак, расподела терета на транспортна средства и слично. D. Judin и E. Golshtein у својој књизи су доказали вези између решавајућих множитеља (објективно условљене оцене) и дуалних променљивих. Отуда има основа везивати појаву линеарног програмирања за Kantorovich [36].

Транспортни проблем линеарног програмирања је први формулисао F. L. Hitchcock 1941. год. и предложио алгоритам за решавање [34]. Независно од F. L. Hitchcock на формулисању транспортног проблема и његовом решавању радио је и T. C. Koopmans, који је резултате својих истраживања објавио 1947. год. и притом дао примену теорије оптималне алокације ресурса на одређену индустрију, предлажући да је систем цена који би одговарао маргиналним трошковима неопходан за управљање оптималном алокацијом ресурса у производном систему [46].

Најзначајнији за развој и напредак линеарног програмирања био је George B. Dantzig, који је 1947. год. формулисао општи проблем линеарног програмирања и поставио симплекс методу. Он је у периоду II светског рата радио у групи, која је под руководством D. Hitchcock и Marshall K. Wood, испитивала алокације ресурса уз минимизирање, односно максимизирање једне линеарне функције. Данцигов рад (*Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities*) је представљао основу за све наредне елаборације линеарног програмирања. Dantzig је био врло активан у изради радова из области линеарног програмирања. Први од њих (*Programming of Interdependent Activities, Mathematical Model, Econometrica 17*) публикован је 1949. год. и у њему су изложене основне идеје симплекс методе. У осталим радовима, сарађујући са другим ауторима, разматрао је разне модификације методе, испитивао случај дегенерације, дуални проблем, предлагао алгоритме за решавање транспортних проблема, целобројног програмирања итд. Његова књига се може сматрати једном од потпунијих и значајних дела из линеарног програмирања [16]. Откриће и примене симплекс методе увелико су допринели теорији и пракси економије. Линеарно програмирање је коришћено за распоређивање ресурса, планирање запослених, планирање инвестиционих портфеља, планирање производње и формулисање маркетиншких и војних стратегија [53].

У периоду 1947-1949 год. почиње у САД интензивна разрада линеарног програмирања, посебно у теоријском смислу. Радови J. Von Neumann (*Theory of Games and Economic Behavior* и итд.), су омогућили теоријско формулисање дуалног проблема, као и проналажење везе између линеарног програмирања и теорије игара. У разради теорије линеарног програмирања дали су знатан допринос D. Gale, H. Kuhn и A. Tucker (*Linear Programming and the Theory of Games*), међу чијим радовима је посебно значајно истраживање у области дуалних проблема.

A. Charnes, W. Cooper и A. Henderson спадају у веома успешне ауторе. Њихов заједнички рад (*A. Charnes, W. Cooper and A. Henderson, An Introduction to Linear Programming, J. Wiley, 1953*) је један од првих потпунијих радова о линеарном програмирању. A. Charnes је предложио метод за отклањање дегенерације (*Optimality and Degeneracy in Linear Programming, Econometrica 20, 1952*). E. Beale је проучавао проблем цикличности, као један од могућих узрока дегенерације (*Cycling in the Dual Simplex Algorithm, Naval Res. Logist. Quart. 2/1955*), а C. E. Lemke (*The dual method of solving the linear programming problem, Naval Res. Logists. Quart*) је 1954. год. развио дуални симплекс алгоритам, као варијанту примарног симплекс алгоритма L. Ford и D. Fulkerson су развили примал – дуал алгоритам за транспортни проблем [17].

Комерцијална примена линеарног програмирања почела је 1952. год. када су A. Charnes, W Cooper и B. Mellon објавили рад на тему оптималног мешања нафтних деривата за производњу бензина (*Blending Aviation Gasolines - A Study in Programming Interdependent Activities in an Integrated Oil Company*).

Након тога, 1954. год. је у RAND Corporation развијен први комерцијални софтвер за решавање проблема линеарног програмирања.

L. G. Khachian је 1978. год. развио алгоритам временског полинома за решавање линеарних програма (*A polynomial Algorithm in Linear Programming*) који је указивао на то како се елипсоидна метода за линеарно програмирање може применити у полиномном времену.

N. K. Karmarkar (*A new polynomial-time algorithm for linear programming*) је 1984. год. развио алгоритам за решавање проблема линеарног програмирања у полиномијалном времену. Временске перформансе алгоритма су били знатно боље од Kachian-ов алгоритам.

Данас постоје хиљаде софтвера и алата за решавање проблема линеарног програмирања, међу којима најпопуларнији су Maplesoft, Matlab, Mathematica, GLPK (gnu.org/software/glpk), SageMath (sagemath.org), Visual Math, чак је и Microsoft Excel одличан програм са значајном применом у овој проблематици.

## 2.2 ДЕФИНИЦИЈЕ И ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕ

Линеарно програмирање је квантитативна научна метода, помоћу које се, између осталог, од већег броја разних алтернативних решења може изабрати оптимално решење, односно утврдити оптимално искоришћење ресурса.

Према [36] предмет линеарног програмирања је израчунавање екстрема, минималне или максималне вредности, линеарних индикатори квалитета, под условом да променљиве које се одређују задовољавају линеарне једнакости или неједнакости. Линеарно програмирање може се дефинисати као проблем минимизирања или максимизирања линеарне функције која је предмет линеарним ограничењима. Ограничења могу бити једнакости или неједнакости.

Једноставну и практичну дефиницију линеарног програмирања дали су S. Khan, A. Bari, M.F. Khan у њиховој књизи [43]. Према њима, линеарно програмирање је процес трансформације ситуације из стварног живота у математички модел који се састоји од линеарне функције која се мора максимизирати или минимизирати под коначним бројем линеарних ограничења, а затим развијање алгоритама помоћу којих се математички модел може решити.

Примена линеарног програмирања је широка, користи се за анализу различитих проблема, различитих и по природи и по обиму. Решавањем проблема применом линеарног програмирања добија се објективна основа за доношење праве одлуке. Линеарно програмирање има за циљ стварање научне подлоге за доношење најприхватљивије одлуке. Ово омогућује израду економског прорачуна за оптимално искоришћење процењених средстава.

Код примене у пракси, најбитније је развити математички модел индицираног проблема, као и врло прецизно установити међусобну линеарну зависност појединих чинилаца. На тако дефинисаном моделу, математичким манипулацијама испитују се технолошке и економске импликације постављених рестрикција као и долажење до базичних оптималних решења и закључака [90].

Методама линеарног програмирања могу се решавати најразличитији проблеми различите природе. Поред математике, економије, телекомуникација и, генерално, пословних процеса, линеарно програмирање може се применити практично у свакој индустрији за решавање различитих инжењерских проблема (нпр. оптимизација продукта и дизајна), ефикасна производња (нпр. максималан профит), прехрамбена и пољопривредна индустрија (нпр. коју врсту усева користити и њихов квалитет), оптимизација транспортних система, енергетска индустрија, такође рударска индустрија (нпр. рудне резерве, квалитет руде, оптимизација производње) итд.

## 2.3 ГЛАВНЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ ПРОБЛЕМА

Линеарно програмирање представља скуп метода помоћу којих се решавају разноврсни проблеми. Да би се проблем могао решити помоћу линеарног програмирања потребно је испунити неколико основних услова. Аутори који се баве овом проблематиком [16,36,44,59] описују своју перспективу карактеристика проблема. Генерално, заједничке карактеристике свих проблема линеарног програмирања су:

1. **Линеарна веза.** Између промењљивих, у сваком проблему линеарног програмирања, мора да постоји линеарна зависност, линеарна веза. Међутим, у већини проблема скоро да и не постоји функционална зависност између промењљивих, тј. између појава које формирају један проблем. Обично се јављају стохастичке зависности. Преостаје једино да се претпостави да постоји функционална, односно још ближе, линеарна зависност између ових појава, а разлике или занемаре или израчуна коефицијент одступања. Ако одступање није занемарљиво, проблем се не може решити методама линеарног програмирања.

2. **Циљ.** Или циљна функција, дефинисана је као предмет доношења одлука. Овај услов мери ефикасност система у функцији промењљиве. Циљ такође одређује правац оптимизације, било да се максимизира или минимизира. Треба одредити промењљиве како би се циљни услов бити оптимизован. Циљ мора да буде јасно формулисан, без алтернативне дефиниције и суштине.

3. **Ограничења.** Сваки проблем који се жели решити методама линеарног програмирања треба да буде ограничен извесним лимитирајућим факторима. То је скуп функционалних једнакости или неједнакости који, у зависности од проблема, представљају физичка, економска, технолошка, правна и друга ограничења у вези са вредностима које се могу доделите промењљивама. То значи, да за решење проблема треба да постоје ограничене могућности, ограничена средства итд.

4. **Ненегативност.** У сваком проблему, вредност промењљиве треба да је ненегативна, тј. мора да буде нула или позитивна.

## 2.4 ФАЗЕ У РЕШАВАЊУ ПРОБЛЕМА

Моделовање и анализа проблема у линеарном програмирању развија се кроз неколико фаза. Већина аутора, као D. Judin, G. Dantzig, A Charnes, V. Radević, S. Vujić, B. Kolman у својим књигама [14,16,36,44,90] су детаљно описали фазе у решавању проблема.

Генерално, ток решавања проблема методама линеарног програмирање може се поделити на три фазе, тачније формулација, интерпретација и анализа. Прва фаза укључује дефинисање проблема, избор методе, прикупљане података и формирање модела. Интерпретациона фаза подразумева решавање модела и стабилизовање решења. Следећи, задњи, корак је анализе и оцена модела.

Фазе решавања проблема детаљно су описане у наставку.

1. **Дефинисање проблема.** Сврха дефинисања и формулисања проблема је истражити расположиве ресурсе, поставити улазне податке и циљеве који треба испунити и услове под којима се може остварити. Такође се мора обратити пажња на ограничења, ограничења и захтеве различитих алтернатива. У овој фази најбитније је да се утврди, да ли проблем има карактеристике које су потребне да би могао бити решен методама линеарног програмирања.

2. **Избор методе.** Једном када се утврди да се проблем може решити помоћу линеарног програмирања, приступа се избору методе. Врста методе линеарног програмирања која ће бити примењена, директно зависи од одлика проблема.

3. **Прикупљање података.** Ово је кључна фаза која се заснива на прикупљању података од којих зависи даљи ток рада. Тачност и веродостојност оптималног решења зависи од тачности и истинитости полазних података прикупљених у овој фази, међу којима посебно место припада одговарајућем документационом материјалу. Уколико полазни подаци (на основу којих је формиран модел проблема) нису адекватни, методе линеарног програмирања не могу позитивно утицати на квалитет оптималног решења.

4. **Формирање модела**. У овој фази ради се на постављању математичког приказа проблема на основу прикупљених података. Сви изазови и потребе морају се тумачити математички како би се дефинисала ограничења проблема. Мора се водити рачуна да модел задовољава приказ проблема који се анализира, а да притом остане математички изводљив. Он треба да реагује на све промене његових параметара исто онако, како би реаговао стварни проблем под утицајем промене ограничавајућих фактора. Често се формира математички модел који има познати облик и за који су доступне методе решавања.

5. **Решавање модела.** У овој фази приступа се решавању претходно формираног модела. Поступак решавања модела може бити релативно лаган, једноставним уносом потребних параметара у рачунарски програм. Међутим, у случају када су проблеми неструктуирани или недовољно структуирани, или када је примена егзактних метода неизводљива у разумном времену (нпр. услед експоненцијалне сложености проблема), приступа се примени хеуристичких метода које не гарантују оптимално решење, али нуде довољно добро решење, а у неким случајевима је најбоље направити корекције у фази формирања модела.

6. **Анализа и оцена решења.** Врши се систематска анализа добијеног оптималног решења. Решење модела зависи од вредности наведених у моделу. Веома важан аспект при анализи података је како решење варира у зависности од унетих података. При оцени решења, важно је утврдити да ли решење заиста представља жељено решење проблема. Односно, да ли је решење реално, прихватљиво и може ли се применити у пракси. Ово је последња фаза која интерактивно помаже у процесу доношења одлука.

## 2.5 МЕТОДЕ ЛИНЕАРНОГ ПРОГРАМИРАЊА

### 2.5.1 Графичка метода

Графичка метода се првенствено користити за решавање проблема линеарног програмирања само ако проблем нема више од две непознате. У ретким случајевима, једноставних проблема, графичка метода може решити проблеме са три непознате.

Поступак решења се изводи у дводимензионалном простору. Модел обухвата један систем различитог броја линеарних једначина и неједначина. Све једначине и неједначине морају имати заједничких елемената, јер делују као једна целина, један проблем. У првом квадранту координатног система једначина су представљена правама, а неједначина представљена су полуравнима, док функција критеријума представљена је правом [43].

Уколико је потребно наћи решење којим се максимизира вредност функције, при чему су задовољени одређени критеријуми, односно ограничења, алгоритам решавања је објашњен на следећем примеру.

Идентификовање управљачких променљивих $x_1$ и $x_2$ и дефинисање функције циља:

$$\max z(x) = 4x_1 + 5x_2$$

при чему треба да буде задовољена ограничења:

$$2x_1 + 5x_2 \leq 30$$

$$6x_1 + 5x_2 \leq 50$$

$$x_1 \, ; \, x_2 \geq 0$$

Прво, да би се добиле координатне тачке за сваку једначину, потребно је претворити све неједначине у једначине и поставити вредност сваке променљиве на 0. Када се добију све координатне тачке, одређује се опсег променљивих који омогућује да се утврди одговарајућа скала која ће се користити за графикон. Након тога, се црта графикон и спајају се све координатне тачке потребном правом линијом.

$$2x_1 + 5x_2 = 30$$

$$x_1 = 0 \ \rightarrow \ x_2 = 6$$

$$x_2 = 0 \ \rightarrow \ x_1 = 15$$

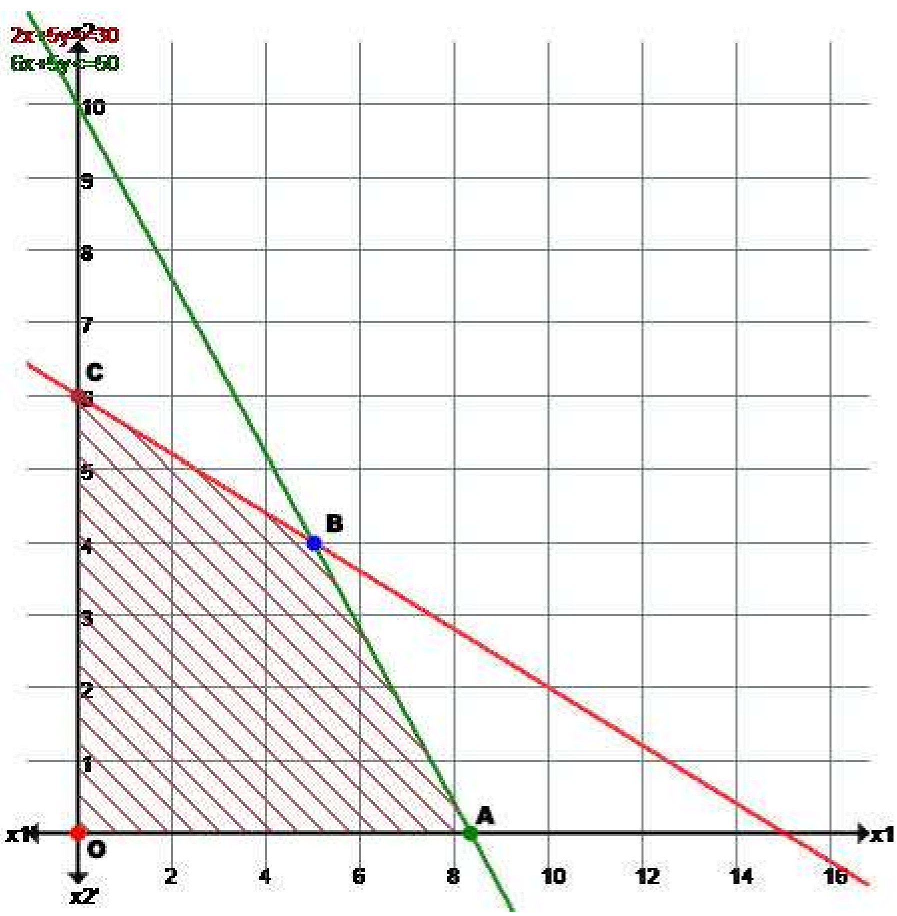
$$6x_1 + 5x_2 = 50$$

$$x_1 = 0 \ \rightarrow \ x_2 = 10$$

$$x_2 = 0 \ \rightarrow \ x_1 = 8{,}33$$

Према овоме, опсег $x_1$ је $0 \leq x_1 \leq 15$, а опсег $x_2$ је $0 \leq x_2 \leq 10$.

Графички приказ допустиве области решења је приказан на слици 2.1.




*Слика 2.1 Графички приказ допустиве области решења*

Вредност функције за сваку од ових екстремних тачака је следећа:

| **Координате екстремних тачака ($x_1$, $x_2$)** | **Вредност функције $z(x) = 4x_1 + 5x_2$** |
|---|---|
| O (0, 0) | 4(0) + 5(0) = 0 |
| A (8,33, 0) | 4(8,33) + 5(0) = 33,33 |
| B (5, 4) | 4(5) + 5(4) = 40 |
| C (0, 6) | 4(0) + 5(6) = 30 |

Максимална вредност функције $z = 40$ јавља се у екстремној тачки (5, 4), дакле оптимално решење датог проблема је $x_1 = 5, x_2 = 4$ и $\max Z = 40$.

### 2.5.2 Симплекс метода

Симплекс метода је ефикасна, широко коришћена и универзална метода решавање проблема линеарног програмирање коју је развио G. Dantzig, 1947. год. Метода се заснива на померању од дате екстремне тачке (базно допустиво решење) до граничне екстремне тачке на такав начин да се вредност циљне функције повећава или, у најгорем случају, остаје иста. Конкретније, у сваком кораку, вредност функције је ближа екстремној вредности. Метода се наставља све док се не добије оптимално решење или се не утврди да дати проблем нема коначно оптимално решење [44].

Симплекс метода креће од претпоставке да је лакше радити са једначинама него са неједначинама на начин који их претвара у једначине додавањем допунских промењљивих, при чему за почетно решење узима решење када су све промењљиве једнаке нули, а допунске промењљиве имају вредност слободних чланова из скупа ограничења.

Симплекс методом могу се решавати сви проблеми линеарног програмирања. То значи да се овом методом могу да решавају и тзв. транспортни проблеми и проблеми распоређивања, за које, иначе, постоје посебне методе. Отуда је оправдано када се каже да симплекс методе има известан карактер општости, односно да је, у поређењу са осталим методама линеарног програмирања, универзална метода.

Симплекс алгоритам се састоји из два корака [44]:

1. Утврђивање да ли је дато допустиво решење оптимално решење, и
2. Начин добијања изводљивог решења са истом или већом вредношћу за циљну функцију.

У пракси, симплекс метода не испитује свако изводљиво решење, већ проверава само релативно мали број њих.

Постоји већи број алгоритама симплекс метода који могу решити различите проблеме линеарног програмирања. Најзначајније су:

- Симплекс табела,
- Данцигов алгоритам,
- Ревидирана симплекс метода,
- Метода елементарних матрица и
- Метода подматрица.

Генерално, разлике у алгоритму метода су врло мале, а оптимално решење проблема биће исто без обзира која се метода користи.

Теоријске основе симплекс метода линеарног програмирања поставио је G. B. Dantzig [16] и састоји се следећег.

Општа структура симплекс методе састоји се од проналажење такве вредности за промењливе $x_j, (j = 1,2, \dots, k)$ које ће обезбедити да функција критеријума:

$$z_0 = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j \tag{1.1}$$

узме своју максималну вредност која ће истовремено задовољити систем неједначина:

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j \leq a_{io}\,, \qquad (i = 1,2, \dots, m) \tag{1.2}$$

$$x_j \geq 0, \qquad (j = 1,2, \dots, k) \tag{1.3}$$

при чему су $c_j$, $a_{ij}$ и $a_{io}$ познате величине, а свако $a_{io}$ је ненегативно, тј. $a_{io} \geq 0$.

У развијеној математичкој форми овај проблем има:

А) Функција критеријума:

$$\max z_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_k x_k$$

Б) Ограничавајуће факторе:

$$\mathrm{a}_{11} x_1 + \mathrm{a}_{12} x_2 + \cdots + \mathrm{a}_{1k} x_k \le \mathrm{a}_{10}$$

$$\mathrm{a}_{21} x_1 + \mathrm{a}_{22} x_2 + \cdots + \mathrm{a}_{2k} x_k \le \mathrm{a}_{20}$$

$$\ldots$$

$$\mathrm{a}_{m1} x_1 + \mathrm{a}_{m2} x_2 + \cdots + \mathrm{a}_{mk} x_k \le \mathrm{a}_{m0}$$

$$x_j \ge 0, \qquad (j = 1,2, \ldots, k).$$

Да би се проблем решио симплекс методом, потребно је математичку форму прилагодити додавањем изравнавајућих променљивих $x_{k+i}$, $(i = 1,2, \ldots, m)$ тако да се добија систем једначина.

Функција критеријума се, такође, мора проширити са новоусвојеним изравнавајућих променљивих. Да не би дошло до промене вредности функција критеријума, услед овог проширења, усвојимо да су сви коефицијенти $c_{k+i}$, $(i = 1,2, \ldots, m)$ уз променљиве $x_{k+i}$, $(i = 1,2, \ldots, m)$ једнаки нули, тј:

$$c_{k+i} = 0, \qquad (i = 1,2, \ldots, m) \tag{1.4}$$

Функцију критеријума је сада:

$$\max z_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_k x_k + c_{k+1} x_{k+1} + c_{k+2} x_{k+2} + \cdots + c_{k+m} x_{k+m}$$

а ограничавајући фактори:

$$\mathrm{a}_{11} x_1 + \mathrm{a}_{12} x_2 + \cdots + \mathrm{a}_{1k} x_k + x_{k+1} = a_{10}$$

$$\mathrm{a}_{21} x_1 + \mathrm{a}_{22} x_2 + \cdots + \mathrm{a}_{2k} x_k + x_{k+2} = a_{20}$$

$$\ldots$$

$$\mathrm{a}_{m1} x_1 + \mathrm{a}_{m2} x_2 + \cdots + \mathrm{a}_{mk} x_k + x_{k+m} = a_{m0}$$

односно:

$$x_j \geq 0, (j = 1,2, \dots, k, k+1, \dots, k+m)$$

$$a_{i0} \geq 0, \qquad (i = 1,2, \dots, m)$$

$$c_{k+i} = 0, \qquad (i = 1,2, \dots, m).$$

При чему добијамо:

А) Функција критеријума:

$$\max z_0 = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} c_{k+i} x_{k+i} \tag{1.5}$$

Б) Ограничавајући фактори:

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j + x_{k+i} = a_{10}, \qquad (i = 1,2, \dots, m) \tag{1.6}$$

$$x_j \geq 0, \qquad (j = 1,2, \dots, k, k+1, \dots k+m). \tag{1.7}$$

На основу овако прилагођеног модела може се саставити почетна симплекс табела или формирати матрични облик на следећи начин:

*Почетна симплекс табела*

| $C$ | $B$ | $X_0$ | $c_1$ | $c_2$ | ... | $c_k$ | $c_{k+1} = 0$ | $c_{k+2} = 0$ | ... | $c_{k+m} = 0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $X_1$ | $X_2$ | ... | $X_k$ | $X_{k+1}$ | $X_{k+2}$ | ... | $X_{k+m}$ |
| $c_{k+1} = 0$ | $X_{k+1}$ | $a_{10}$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | ... | $a_{1k}$ | 1 | 0 | ... | 0 |
| $c_{k+2} = 0$ | $X_{k+2}$ | $a_{20}$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | ... | $a_{2k}$ | 0 | 1 | ... | 0 |
| $\vdots$ | | | | | | | | | | |
| $c_{k+m} = 0$ | $X_{k+m}$ | $a_{m0}$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | ... | $a_{mk}$ | 0 | 0 | ... | 1 |
| $z_j - c_j$ | | $z_0 = 0$ | $-c_1$ | $-c_2$ | ... | $-c_k$ | 0 | 0 | ... | 0 |

У облику матрице то би изгледало овако:

$$CX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Једно од могућих решења проблема може се утврдити уз помоћ почетне симплекс табеле, тј.

$$x_{k+1} = a_{10},$$

$$x_{k+2} = a_{20},$$

$$\vdots$$

$$x_{k+m} = a_{m0},$$

при чему је вредност функција критеријума: $z_o = 0$.

Друга варијанта за одређивање почетног решења је решавање система једначина (1.6) уз извесне хипотезе.

А) Прва итерација

Хипотеза:

$$x_j = 0,\ \ (j = 1,2, \dots , k). \tag{1.8}$$

У општем моделу све промењљиве делимо на реалне $(x_j;\ \ j = 1,2, \dots , k)$ и на изравнавајуће $(x_{k+i};\ \ i = 1,2, \dots , m)$.

Да бисмо решили систем једначина у првој итерацији, хипотезу (1.8) унесимо у систем једначина (1.6), па ћемо добити да је:

$$x_{k+i} = a_{i0}, \quad (i = 1,2, \dots , m). \tag{1.9}$$

јер је због (1.8):

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j = 0, (i = 1,2, \dots , m)$$

Решење система (1.6) је идентично са базично могућем решењем добијеном из симплекс табеле.

$$x_{k+i} = a_{i0}, (i = 1,2, \dots, m),$$

Ако базично могуће решење из прве итерације заменимо у функцији критеријума (1.5), добијамо:

$$z'_0 = \sum_{i=1}^{m} c_{k+i} x_{k+i} \tag{1.10}$$

јер је због (1.8):

$$\sum_{j=1}^{k} c_j x_j = 0.$$

Ако хипотезу (1.4) унесемо у (1.10) добијамо да је вредност функција критеријума:

$$z'_0 = \sum_{i=1}^{m} c_{k+i} x_{k+i} = 0$$

што одговара вредности ове функције у првој симплекс табели.

Пошто није пронађена максимална вредност функција критеријума, треба да се утврди следеће могуће решење.

Б) Друга итерација

Хипотеза:

$$x_v > 0, \tag{1.11}$$

$$x_j = 0, \qquad (j = 1,2, \dots, v-1, v+1, \dots, k) \tag{1.12}$$

$$a_{iv} > 0. \tag{1.13}$$

У наредној итерацији, променили смо хипотезу (1.8) из прве итерације тако што тражимо да постоји бар једна позитивна промењљива $x_v > 0$, а да су све остале реалне промењљиве једнаке нули. Такође, коефицијент $a_{iv}$ који стоји уз промењљиву $x_v$ треба да буде бар у једној једначини позитиван.

Коришћењем овим хипотезама проналази се решење система (1.6), тј.

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j + x_{k+i} = a_{10}, \qquad (i = 1,2, \dots, m) \tag{1.6}$$

Базно допустиво решење је:

$$a_{iv}x_v + x_{k+i} = a_{i0}, (i = 1,2, \dots, m). \tag{1.14}$$

јер су све остале реалне промењиве, изузев $x_v$, једнаке нули, па је и:

$$\sum_{j \neq v}^{k} a_{ij}x_j = 0, (i = 1,2, \dots, m)$$

Вредност промењиве $x_v$ и промењивих $x_{k+i}$, $(i = 1,2, \dots, m)$ у другој итерацији, проналази се на следећи начин:

Решавањем система једначина (1.14) по непознатим $x_{k+i}$, $(i = 1,2, \dots, m)$ добија се:

$$x_{k+i} = a_{i0} - a_{iv}x_v, \qquad (i = 1,2, \dots, m) \tag{1.15}$$

Свака промењива у симплекс проблему мора, због (1.7), бити ненегативна. У првој итерацији утврђено је:

$$x_{k+i} = a_{i0}, \quad (i = 1,2, \dots, m). \tag{1.9}$$

што значи да су све промењиве $x_{k+i} \geq 0, (i = 1,2, \dots, m)$.

Ако су све промењиве $x_{k+i} \geq 0$, онда и десна страна система (1,15) мора бити негативна, тј.

$$a_{i0} - a_{iv}x_v \geq 0, \qquad (i = 1,2, \dots, m)$$

Решавањем по $x_v$, добија се максимална вредност промењиве $x_v$, тј.

$$x_v \leq \frac{a_{i0}}{a_{iv}}, \qquad (i = 1,2, \dots, m)$$

При чему је $a_{iv} > 0$, због претпоставке (1.13).

Минимална и максимална вредност променљиве $x_v$ је утврђена у границама:

$$0 \leq x_v \leq \frac{a_{i0}}{a_{iv}}, \qquad (i = 1,2, \dots, m), \qquad a_{iv} > 0.$$

Будући да је утврђени критеријум функције максимална вредност, свака променљива треба да узме највећу могућу вредност. Постоји $m$ разних максималних вредности променљиве $x_v$, између којих треба изабрати само једну.

$$\text{За } i = 1; x_v = \frac{a_{10}}{a_{1v}},$$

$$\text{За } i = 2; x_v = \frac{a_{20}}{a_{2v}},$$

$$\text{За } i = 3; x_v = \frac{a_{30}}{a_{3v}},$$

$$\dots$$

$$\text{За } i = r; x_v = \frac{a_{r0}}{a_{rv}},$$

$$\dots$$

$$\text{За } i = m; x_v = \frac{a_{m0}}{a_{mv}}.$$

Потребно је изабрати једну вредност за променљиву $x_v$, између ових $m$ разних вредности, под условом да претпоставка (1.7) остане и даље у важности. Да би се то урадило, потребно је изабрати најмању од њих. Дакле,

$$x_v = \min_i \frac{a_{i0}}{a_{iv}}, \qquad (i = 1,2, \dots, m), a_{iv} > 0. \tag{1.16}$$

Најмању вредност променљива $x_v$ добија у $r$-тој једначини (за $i$=$r$). Према томе вредност променљиве $x_v$ је:

$$x_v = \frac{a_{r0}}{a_{rv}}. \tag{1.17}$$

Вредност променљивих $x_{k+i}, (i = 1,2, \dots, m)$ у систему једначина (1.15), добија се占 заменом вредности за $x_v$ из (1.17):

$$x_{k+i} = a_{i0} - a_{iv}x_v,$$

$$x_{k+i} = a_{i0} - a_{iv}\frac{a_{r0}}{a_{rv}}, \qquad (i = 1,2, \dots, m). \tag{1.18}$$

Базно допустиво решење у другој итерацији састоји се од променљиве:

$$x_v = \frac{a_{r0}}{a_{rv}}, \qquad j = v, \tag{1.17}$$

$$x_{k+i} = a_{i0} - a_{iv}\frac{a_{r0}}{a_{rv}}, \qquad (i = 1,2, \dots, m), i \neq r. \tag{1.18}$$

Са $z_0^{''}$ бележи се вредност функција критеријума у другој итерацији, односно за могуће решење (1.17) и (1.18).

Заменом (1.17) и (1.18) у (1.5) добија се, с обзиром на претпоставке за другу итерацији, да је:

$$z_0^{''} = c_v x_v + \sum_{i=1}^{m} c_{k+i} x_{k+i}$$

$$z_0^{''} = c_v \frac{a_{r0}}{a_{rv}} + \sum_{i=1}^{m} c_{k+i}\left(a_{i0} - a_{iv}\frac{a_{r0}}{a_{rv}}\right), \tag{1.19}$$

према (1.4) добија се:

$$z_0^{''} = c_v \frac{a_{r0}}{a_{rv}}. \tag{1.20}$$

У другој итерацији вредност функција критеријума одговара изразу (1.20).

Наредни корак је провера да ли постоји следећа, трећа, итерација, дакле, ако постоји:

$$z_0''' > z_0^{''}$$

тј. ако вредност функција критеријума у наредној итерацији је већа од вредности те функције у претходној итерацији, онда у претходној итерацији није пронађено оптимално решење.

Провера да ли је пронађено оптимално решење у некој итерацији врши се на следећи начин:

Настави се од вредности функције у другој итерацији (1.19):

$$z_0^{"} = c_v \frac{a_{r0}}{a_{rv}} + \sum_{i=1}^{m} c_{k+i} \left( a_{i0} - a_{iv} \frac{a_{r0}}{a_{rv}} \right), \tag{1.19}$$

Након множења и сређивања, добија се:

$$z_0^{"} = c_v \frac{a_{r0}}{a_{rv}} + \sum_{i=1}^{m} c_{k+i} - \sum_{i=1}^{m} c_{k+i} a_{iv} \frac{a_{r0}}{a_{rv}},$$

$$z_0^{"} = \sum_{i=1}^{m} c_{k+i} a_{i0} - \frac{a_{r0}}{a_{rv}} \left( \sum_{i=1}^{m} a_{iv} c_{k+i} - c_v \right). \tag{1.21}$$

Према (1.10) вредности функција критеријума у првој итерацији је:

$$z_0' = \sum_{i=1}^{m} c_{k+i} x_{k+i}$$

Након извршене замене у (1.21) добија се:

$$z_0^{"} = z_0' - \frac{a_{r0}}{a_{rv}} (z_v - c_v), \tag{1.23}$$

При чему је:

$$z_v = \sum_{i=1}^{m} a_{iv} c_{k+i}$$

Да би се задовољила претпоставка $x_v > 0$, дозвољава се да било која од свих $(k + m)$ промењљивих буде позитивна. Због тога, проширује се (1.23) да важи за било коју промењљиву, па добија се:

$$z_0^{"} = z_0' - \frac{a_{r0}}{a_{rv}} (z_j - c_j), \qquad (j = 1,2, \ldots, k, k + 1, \ldots, k + m). \tag{1.24}$$

На основу (1.24), $z_0^{"} > z_0'$ само ако је:

$$z_j - c_j < 0, \qquad (j = 1,2, \dots, k, k+1, \dots, k+m) \tag{1.25}$$

Итерација (1.25) представља критеријум за утврђивање да ли је пронађено оптимално решење.

Оптимално решење није пронађено и треба наставити са решавањем проблема уколико постоји бар једно:

$$z_j - c_j < 0, \qquad (j = 1,2, \dots, k, k+1, \dots, k+m)$$

Критеријум за избор променљиве која улази у наредно допустиво решење базира се на разлици $\left(z_j - c_j\right) < 0$. Да би се што више повећала функција критеријума у наредном решењу, треба изабрати највећу негативну разлику $\left(z_j - c_j\right)$, и на основу ње одредити променљиву која улази у наредно решење. Треба изабрати да у наредно базно допустиво решење уђе она променљива за коју је:

$$\left[\max_j (z_j - c_j)\right] < 0, \qquad (j = 1,2, \dots, k, k+1, \dots, k+m) \tag{12.26}$$

Усвојено је да је $(j = v)$ највећа негативна разлика $\left(z_j - c_j\right)$, па је одређено да променљива $x_v$ уђе у друго базно допустиво решење. Отуда је уведена претпоставка $x_v > 0$. Критеријум за утврђивање променљиве која излази из решења дато је у изразу (1.16), тј.,

$$x_v = \min_i \frac{a_{i0}}{a_{iv}}, \quad (i = 1,2, \dots, m), a_{iv} \geq 0 \tag{1.16}$$

чиме истовремено утврђује и вредност променљиве која улази у решење.

Претпоставља се да се минимална вредност (1.16) постиже за $(i = r)$, што значи да ће променљива $x_{k+r}$ имати вредност нулу у другој итерацији и изаћи из решења.

У другој итерацији констатовано је да није пронађено оптимално решење, дакле треба наставити са решавањем проблема. Неопходно је да се израчунавају коефицијенти који стоје уз све променљиве у другој итерацији, односно у другој симплекс табели.

Коефицијенти се утврђују на следећи начин:

Из система једначина (1.6) изаберемо $r$-ту једначину за $i = r$, тј:

$$\sum_{j=1}^{k} a_{rj} x_j + x_{k+r} = a_{r0}$$

односно:

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rv}x_v + \cdots + a_{rk}x_k + x_{k+r} = a_{r0}$$

Претпоставком да је $a_{rv} > 0$, дели се сваки коефицијент $r$-те једначине и добија се:

$$\frac{a_{r1}}{a_{rv}}x_1 + \frac{a_{r2}}{a_{rv}}x_2 + \cdots + x_v + \cdots + \frac{a_{rk}}{a_{rv}}x_k + \frac{1}{a_{rv}}x_{k+r} = \frac{a_{r0}}{a_{rv}}. \qquad (1.27)$$

Остале једначине система (1.6) су:

$$\mathrm{a}_{11}x_1 + \mathrm{a}_{12}x_2 + \cdots + \mathrm{a}_{1k}x_k + x_{k+1} = a_{10}$$

$$\mathrm{a}_{21}x_1 + \mathrm{a}_{22}x_2 + \cdots + \mathrm{a}_{2k}x_k + x_{k+2} = a_{20}$$

$$\ldots$$

$$\mathrm{a}_{m1}x_1 + \mathrm{a}_{m2}x_2 + \cdots + \mathrm{a}_{mk}x_k + x_{k+m} = a_{m0}$$

Множењем једначине (1.27) са $a_{1v}$ а затим одузимањем од прве једначине система (1.6) добија се:

$$\left(a_{11} - \frac{a_{r1}}{a_{rv}}a_{1v}\right)x_1 + \left(a_{12} - \frac{a_{r2}}{a_{rv}}a_{1v}\right)x_2 + \cdots + (a_{1v} - a_{1v})x_v + \cdots + \left(a_{1k} - \frac{a_{rk}}{a_{rv}}a_{1v}\right)x_k + x_{k+1} - \frac{1}{a_{rv}}a_{1v}x_{k+r} = a_{10} - \frac{a_{r0}}{a_{rv}}a_{1v}$$

Добијене коефицијенте треба уписати у први ред друге симплекс табеле. На исти начин утврђују се коефицијенти за све редове, изузев $r$-тог за који у (1.27) већ имамо те коефицијенте.

Коефицијенте за други ред друге симплекс табеле добијамо множењем једначине (1.27) са $a_{2v}$, па одузимањем од друге једначине система (1.6).

$$\left(a_{21} - \frac{a_{r1}}{a_{rv}} a_{2v}\right) x_1 + \left(a_{22} - \frac{a_{r2}}{a_{rv}} a_{2v}\right) x_2 + \cdots + (a_{2v} - a_{2v}) x_v + \cdots + \left(a_{2k} - \frac{a_{rk}}{a_{rv}} a_{2v}\right) x_k + x_{k+2} - \frac{1}{a_{rv}} a_{2v} x_{k+r} = a_{20} - \frac{a_{r0}}{a_{rv}} a_{2v}.$$

И на крају за $m$-ти ред добијају се коефицијенти, ако се једначина (1.27) помножи са $a_{mv}$, па се одузме од $m$-тог реда система (1.6), тј.

$$\left(a_{m1} - \frac{a_{r1}}{a_{rv}} a_{mv}\right) x_m + \left(a_{m2} - \frac{a_{r2}}{a_{rv}} a_{mv}\right) x_2 + \cdots + (a_{mv} - a_{mv}) x_v + \cdots + \left(a_{mk} - \frac{a_{rk}}{a_{rv}} a_{mv}\right) x_k + x_{k+m} - \frac{1}{a_{rv}} a_{mv} x_{k+r} = a_{m0} - \frac{a_{r0}}{a_{rv}} a_{mv}$$

Ако се узме у обзир хипотеза за другу итерацију (1.11), (1.12) и (1.13) добија се за:

$$i = 1; x_{k+1} - \frac{1}{a_{rv}} a_{1v} x_{k+r} = a_{10} - \frac{a_{r0}}{a_{rv}} a_{1v},$$

$$i = 2; x_{k+2} - \frac{1}{a_{rv}} a_{2v} x_{k+r} = a_{20} - \frac{a_{r0}}{a_{rv}} a_{2v},$$

...

$$i = r; x_v - \frac{1}{a_{rv}} a_{1v} x_{k+r} = \frac{a_{r0}}{a_{rv}},$$

...

$$i = m; x_{k+m} - \frac{1}{a_{rv}} a_{mv} x_{k+r} = a_{m0} - \frac{a_{r0}}{a_{rv}} a_{mv}$$

Установљено је да у (1.17):

$$x_v = \frac{a_{r0}}{a_{rv}}$$

па је, услед тога, $r$-тој једначини:

$$x_{k+r} = 0$$

Променом вредности $x_{k+r}$ у свим једначинама добија се:

$$x_{k+1} = a_{10} - \frac{a_{r0}}{a_{rv}} a_{1v},$$

$$x_{k+2} = a_{20} - \frac{a_{r0}}{a_{rv}} a_{2v},$$

$$\dots$$

$$x_v = \frac{a_{r0}}{a_{rv}},$$

$$\dots$$

$$x_{k+m} = a_{m0} - \frac{a_{r0}}{a_{rv}} a_{mv},$$

Овако добијено решење проблема је истоветно са решење у другој итерацији (1.17) и (1.18).

Уз помоћ овог принципа могуће је  утврдити базно допустиво решење, израчунати вредност функција критеријума и израчунати коефицијенте уз променљиве за било које две узастопне итерације.

Решење може се склопити у другу симплекс табелу или у матрични облик по потреби.

*Друга симплекс табела*

| $C$ | $B$ | $X_0$ | $c_1$ | … | $c_v$ | … | $c_k$ | $c_{k+1}=0$ | $c_{k+2}=0$ | … | $c_{k+r}=0$ | … | $c_{k+m}=0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $X_1$ | … | $X_v$ | … | $X_k$ | $X_{k+1}$ | $X_{k+2}$ | … | $X_{k+r}$ | … | $X_{k+m}$ |
| $c_{k+1}=0$ | $X_{k+1}$ | $a_{10}-\frac{a_{r0}}{a_{rv}}a_{1v}$ | $a_{11}-\frac{a_{r1}}{a_{rv}}a_{1v}$ | … | 0 | … | $a_{1k}-\frac{a_{rk}}{a_{rv}}a_{1v}$ | 1 | 0 | … | $-\frac{1}{a_{rv}}a_{1v}$ | … | 0 |
| $c_{k+2}=0$ | $X_{k+2}$ | $a_{20}-\frac{a_{r0}}{a_{rv}}a_{2v}$ | $a_{21}-\frac{a_{r1}}{a_{rv}}a_{2v}$ | … | 0 | … | $a_{2k}-\frac{a_{rk}}{a_{rv}}a_{2v}$ | 0 | 1 | … | $-\frac{1}{a_{rv}}a_{2v}$ | … | 0 |
| | | | | | | | ⋮ | | | | | | |
| $c_v \neq 0$ | $X_v$ | $\frac{a_{r0}}{a_{rv}}$ | $\frac{a_{r1}}{a_{rv}}$ | … | 1 | … | $\frac{a_{rk}}{a_{rv}}$ | 0 | 0 | … | $\frac{1}{a_{rv}}$ | … | 1 |
| | | | | | | | ⋮ | | | | | | |
| $c_{k+m}=0$ | $X_{k+m}$ | $a_{m0}-\frac{a_{r0}}{a_{rv}}a_{mv}$ | $a_{m1}-\frac{a_{r1}}{a_{rv}}a_{mv}$ | … | 0 | … | $a_{mk}-\frac{a_{rk}}{a_{rv}}a_{mv}$ | 0 | 0 | … | $-\frac{1}{a_{rv}}a_{mv}$ | … | 1 |
| $z_j-c_j$ | | $z_0$ | $z_1-c_1$ | … | 0 | … | $z_k-c_k$ | 0 | 0 | … | $z_{k+r}-c_{k+r}$ | … | 0 |

Општи модел који је погодан за решавање свих проблема линеарног програмирања у матричном облику може се навести на следећи начин:

А) Функција критеријума:

$$z_0 = CX \tag{1.28}$$

Б) Ограничавајући фактори:

$$X \geq 0 \tag{1.29}$$

$$AX = A_0 \tag{1.30}$$

при чему је:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}; A_0 = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \vdots \\ a_{m0} \end{bmatrix}$$

$$C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

При томе су познати сви коефицијенти вектора $C$ и $A_0$ и матрице $A$. Коефицијенти вектора $A_0$ су ненегативни, а у матрици $A$, $m < n$.

Решење проблема је сваки вектор $X$ који задовољава ограничење (1.30). Ако поред (1.30) задовољава и ограничење (1.29), решење представља могуће решење проблема. Базично могуће решење је оне решење у коме вектор $X$ не садржи више од $m$ позитивних координата. Оптимално решење представља решење које има једно или више базичних могућих решења који испуњавају услов (1.28). Базично могуће решење у коме вектор $X$ садржи тачно $m$ позитивних координата представља недегенерисано решење. Дегенерисано решење је оно које садржи мање од $m$ позитивних координата.

Један проблем од $n$ вектора, са $m$ линеарно независних, може имати највише $\binom{n}{m}$ различитих могућих решења, јер се највише може формирати $\binom{n}{m}$ различитих комбинација линеарно независних вектора. Овако се могу добити бројна могућих решења, а проналажење оптималног решења често је технички неизводљив посао.

Коришћењем симплекс методе до оптималног решења долази се постепено, плански и најкраћим путем, при чему није потребно да се проналази свако базично могуће решење.

Процес у решавању проблема симплекс методом подразумева да се постојано врши замена вектора који чине базу векторског простора. Одабирањем позитивних координата вектора $X$, врши се замена вектора који чине базу векторског простора тако да један линеарно зависан вектор улази уместо једног линеарно независног вектора који испада из базе векторског простора. При свакој наредној промени вектора у бази векторског простора врши се избор нове координате и измена постојећих позитивних координата вектора $X$, тако да линеарна функција (1.28) добија све већу вредност. Проблем је решен када се не могу пронаћи координате вектора $X$, које би донеле повећање вредности линеарне функције (1.28).

Формирају се критеријуми за одређивање вектора који треба да уђе у базу и за проналажење вектора који треба да изађе из базе. Матрицу $A$ из ограничења $AX = A_0$ (1.30) формира n вектора, међу којима се налази $m$ линеарно независних, односно има (*n*-*m*=*k*) линеарно зависних вектора.

Општи модел је постављен на следећи начин:

А) Функција критеријума:

$$z_0 = \bar{C}\bar{X}$$

Б) Ограничавајуће факторе:

$$\bar{X} \geq 0$$

$$\overline{AX} \leq A_0$$

при чему је:

$$\overline{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1k} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2k} \\ \cdots \\ a_{m1}\ a_{m2} \dots a_{mk} \end{bmatrix}, \qquad A_0 = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \vdots \\ a_{m0} \end{bmatrix}, \qquad \bar{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} = (c_1, c_2, \dots, c_k).$$

Ненегативни вектор $\bar{X}$ максимизира функцију критеријума, коефицијенти вектора $A_0$ су ненегативни. Сви коефицијенти матрице $\overline{\mathrm{A}}$ и вектора $\bar{C}$ и $A_0$ су познати.

Модел се проширује увођењем $m$ линеарно независних вектора, I, који формирају базу векторског простора:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Вектор $X$ има координате $X = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m})$, а вектор $C = (c_1, c_2, \dots, c_k, c_{k+1}, \dots, c_{k+m})$, при чему су $c_{k+i} = 0, (i = 1,2, \dots, m)$, док је $(k + m = n)$.

Овим проширењем долази се на модел представљен функцијом критеријума (1.28) и ограничењима (1.29) и (1.30).

Почиње се од ограничења (1.30):

$$\begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1k} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2k} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}\, a_{m2} \dots a_{mk} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_{k+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \vdots \\ a_{m0} \end{bmatrix}$$

и означава се вектор:

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, (j = 1,2, \dots, k),$$

дакле:

$$[A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_{k+m}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ \vdots \\ x_{k+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \vdots \\ a_{m0} \end{bmatrix}.$$

Првих $k$ вектора представљају линеарно зависне, а последњих $m$ вектора линеарно независне, који формирају $m$-димензионалну базу векторског простора.

Са $A_j, (j = 1,2, \dots, k)$ означавају се линеарно зависне векторе, а са $A, (i = k + 1, k + 2, \dots, k + m)$ линеарно независне векторе, након тога ограничење (1.30) је формирано:

$$\sum_{j=1}^{k} A_j x_j + \sum_{i=k+1}^{k+m} A_i x_i = A_0$$

Координате вектора су:

$$C = [c_1, c_2, \dots, c_k, 0,0, \dots, 0],$$

Јер је $c_{k+i} = 0, \ \ (i = 1,2, \dots, m)$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \qquad (j = 1,2, \dots, k)$$

$$\mathrm{A}_0 = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \vdots \\ a_{m0} \end{bmatrix}$$

док сваки вектор $A_j, \ \ (j = k + 1, k + 2, \dots, k + m)$ представља јединични вектор, тако да свих $m$ јединичних вектора формирају једначину матрици.

При решавању проблема потребно је одабрати координате вектора $X$ да линеарно независним векторима одговарају ненегативне координате вектора $X$. Из тога следи да ће линеарно зависним векторима одговарати координате вектора $X$, које ће све бити једнаке нули.

Ако су координате вектор колоне $X = (0,0, \dots, 0, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+m})$, онда је вредност линеарне функције (1.28):

$$z_0 = CX = [c_1, c_2, \dots c_k, c_{k+1}, \dots c_{k+m}] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ \vdots \\ x_{k+m} \end{bmatrix}$$

Односно:

$$z_0 = \sum_{i=k+1}^{k+m} c_i x_i \tag{1.31}$$

па како је $c_i = 0, (i = k+1, k+2, \dots, k+m)$, онда је у првој итерацији вредност линеарне функције $z_0 = 0$.

Овако одабране координате вектора $X$ испуњавају услов (1.29) и задовољавају линеарне ограничења (1.30) јер је:

$$\sum_{i=k+1}^{k+m} A_i x_i = A_0 \tag{1.32}$$

зато што су све $x_j = 0$ за $(j = 1,2, \dots, k)$.

Одговарајуће координате линеарно зависних вектора за сваку наредну базу векторског простора утврђују се помоћу релације:

$$A_j = \sum_{i=k+1}^{k+m} A_i x_i, \qquad (j = 1,2, \dots, k) \tag{1.33}$$

А одговарајуће $z_j$ помоћу:

$$z_j = \sum_{i=k+1}^{k+m} c_i x_i\,, \qquad (j = 1,2, \dots, k), \tag{1.34}$$

где су $x_{ij}$ координате вектора $A_j$ у наредној бази векторског простора.

Пошто је ово почетни поступак, обично се бирају такве координате вектора $X$, да би и почетна вредност функције (1.28) била једнака нули. На основу тога решење (1.32) има вредност (1.31). Ново базно допустиво решење треба да обезбеди повећање те функције.

### 2.5.3 Данцигов алгоритам

Према имену, Данцигов алгоритам или симплекс алгоритам, осмислио је G. Dantzig [16]. У време када је објављен, представљао је први напредни аналитички поступак за решавање проблема линеарног програмирања великих димензија. Алгоритам преко итеративног поступка, покушава да побољшава циљну функцију узимајући у обзир вредност променљивих на једном пресеку ограничења са другим. Итерације су направљене тако да се вредност циљне функције увек побољшава. Данцигов алгоритам подразумева дефинисање додатних променљивих које се уводе у ограничења неједнакости у проблему. Ове променљиве претварају неједнакости у ограничења једнакости. Ако се у шеми описан поступак прецизира утолико што се координате свих линеарно зависних вектора утврђују помоћу инверзне матрице добија се поступак.

Поступак полази од општег модела који гласи: пронаћи максималну вредност функција критеријума:

$$z_0 = CX$$

при чему је:

$$AX = A_0$$

$$X \geq 0$$

Матрицу $A$ формира $n$ вектора:

$$A = [A_1, A_2, \dots, A_n]$$

међу којима се налазе и линеарно независни, $m$ вектора, $m < n$, тј. $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Координате вектора су:

$$C = [c_1, c_2, \dots, c_n], \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Координате вектора $C$ које одговарају линеарно независним векторима означава се са $\mathrm{C}_0$, а вектора $X$ са $X_0$. тј::

$$C_0 = [c_1, c_2, \dots, c_m], \qquad X_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Линеарно независни вектори формирају матрицу која се означава са $B$, индекс $k$ означава редослед итерације, а $B_k$ представља матрицу вектора који чине базу векторског простора у $k$-тој итерацији.

Алгоритам решавања проблема састоји се у следећем:

1) Састављање матрицу $A$, тј. пописивањем све векторе који постоје у проблему.
2) Одређивање вектора који чине базу векторског простора, тј. проналажењем матрицу $B$.
3) Проналажењем инверзну матрицу матрице $B$, тј. $B^{-1}$
4) Проналажење базно допустиво решење.

Полазећи од (1.32) добија се:

$$BX_0 = A_o$$

Дакле, вектор $X_0$ добија се множењем инверзну матрицу $B^{-1}$ са вектором $A_0$, тј:

$$X_0 = B^{-1}A_0 \tag{1.35}$$

5) Проналажењем вредност функција критеријума:

$$z_0 = C_0 X_0$$

6) Проналажење координате свих линеарно зависних вектора, означених са $X_j$, за базу $B_k$.

Из релације (1.33) добија се:

$$BX_j = A_j$$

а одавде:

$$X_j = A_j \tag{1.36}$$

И то само ако је $B_1$, за $k = 1$, јединична матрица. У свим осталим итерацијама потребно је помоћу инверзне матрице $B^{-1}$, преко (1.36), пронаћи координате свих линеарно зависних вектора у k-тој итерацији.

7) Проналажење разлике $(z_j - c_j)$ које одговарају линеарно зависним векторима,

$$z_j - c_j = C_0 X_j - c_j, \quad (j = m+1, m+2, \dots, n)$$

8) Испитивање да ли је пронађено оптимално решење.
9) Ако није пронађено оптимално решење, одређивање вектора који треба да уђе у наредну базу векторског простора.
10) Избирање вектора који треба да изађе из базе.
11) Формирање нову базу векторског простора и понављање поступка.

### 2.5.4 Дуални проблем

Према Dantzig [16], теорему дуалности за линеарну оптимизацију дефинисао је J. Neumann у својој „теорији игара". Основни принцип је да се у проблему линеарног програмирања могу формирати два математичка модела, примарни и дуални, тј. сваком примарном проблему линеарног програмирања одговара један дуални проблем. Њихова веза је инверзна, тј. ако у примарном проблему тражимо максимум функција критеријума, у дуалном то ће бити минимум. Према тога, неједначине у ограничењима у дуалном проблему имају супротан смер од примарног.

Ако су сва ограничења из модела у примарном проблему истог смера, онда се ради о симетричном дуалном проблему. Напротив, ако су ограничења из примарног модела различитог смера, онда одговара несиметричан дуални проблем.

Процес решавања започиње формирањем примарног проблема тако да можемо пронаћи максималну вредност функција критеријума:

$$\max f(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j \tag{1.37}$$

уз следећа ограничења:

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j \le a_{i0}, \qquad (i = 1,2, \dots, m) \tag{1.38}$$

и услов ненегативности промењљивих:

$$x_j \geq 0, \qquad (j = 1,2, \ldots, k) \tag{1.39}$$

У примарном проблему су непознате $x_j$. У дуалном проблему, уместо променљивих $x_j$ уводе се променљиве $y_j$. Значење примарних и дуалних променљивих се разликује. Дуални проблем ће имати онолико ограничења колико примарни има непознатих. Све променљиве у оба проблема морају бити ненегативне.

Тада дуални проблем који одговара примарном проблему има функција критеријума:

$$\min g(y) = \sum_{i=1}^{m} y_i a_{i0} \tag{1.40}$$

уз следећа ограничења:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i a_{i0} \geq c_j, \qquad (j = 1,2, \ldots, k) \tag{1.41}$$

и услов ненегативности променљивих:

$$y_i \geq 0, \qquad (i = 1,2, \ldots, m). \tag{1.42}$$

Овако постављени модел назива се симетрични дуални модел. Уколико у примарном проблему постоје ограничења типа једначина или ако променљиве не морају испуњавати услов ненегативности, онда проблем представља несиметрични дуални модел.

Ако се у примарном проблему тражи минимална вредност функција критеријума, у дуалном проблему ће се тражити максимална вредност неке друге функција критеријума. Смер неједначина се у овим проблемима мења у супротни.

Оптимално решење примарног проблема је много једноставније пронаћи преко дуала у свим случајевима када у примарном проблему постоји већи број ограничења, а мањи број променљивих. На тај начин треба у примарном проблему тражити инверзне матрице реда $m$, а у дуалном $k$-тог реда ($k<m$). Такође, при тражењу минимума, треба додати допунске и вештачке променљиве, а при тражењу максимума само допунске променљиве. Због тога, ако је m већи, а k врло мали број треба увек прећи на дуални проблем.

Табела 2.1 Однос између примарног и дуалног проблема.

| **ПРИМАРНИ ПРОБЛЕМ** | **ДУАЛНИ ПРОБЛЕМ** |
|---|---|
| $\max f(x)$ | $\min g(y)$ |
| Ограничење “$i$” | Променљива “$i$” |
| $\geq$ | $y_i \leq 0$ |
| $\leq$ | $y_i \geq 0$ |
| = | Неограничен по знаку $y_i$ |
| Променљива “j” | Ограничење “j” |
| $x_j \geq 0$ | $\leq$ |
| $x_j \leq 0$ | $\geq$ |
| Неограничен $x_j$ | = |

Теорија дуалности подразумева:

- За свако решење $x$ примара и свако решење $y$ дуала, вредност функције $g(y)$, којој се одређује минимум, је већа или једнака вредности функције $f(x)$ којој се одређује максимум.

$$\mathrm{A_0Y \geq CX}$$

- X’ и Y’ су оптимална решења ако важи:

$$CX' = A_0Y'$$

- Када је ограничење примара дато у облику једначине, тада је предзнак одговарајуће дуалне променљиве неусловљен, а може бити и негативан.
- Неусловљеног предзнака примарним променљивим, одговарају ограничења дуала у облику једначине.
- Ако један има коначно оптимално решење, тада и други има коначно оптимално решење.
- Ако један има неограничено оптимално решење, тада други нема допустиво решење.
- Допунској променљивој $x_{k+i}$ примара која се налази у оптималном базичном решењу одговара дуална променљива $\mathrm{y}_i = 0$.

- Структурној промењљивој $x_j$ из базично допустивог решења примара одговара допунска промењљива дуала у оптималном решењу $y_{m+j} = 0$. Закључак је да производ структурних промењлива примара и одговарајућих допунских промењљивих дуала једнак нули, тј.

$$x_j \cdot y_{m+j} = 0, \qquad (j = 1,2, \dots , k)$$

### 2.5.5 Транспортна метода

Симплекс методом могу бити решени сви проблеми линеарног програмирања. Међутим, постоје проблеми чија је структура модела таква да се, на једноставнији начин и за краће време, могу решити транспортном методом. Ови проблеми приказују одређивање оптималних трошкова при познатој структури транспорта.

У почетку је овај метод решавао само транспортне проблеме, због чега је и добио име. Примарни циљ је био минимизирање трошкова слања робе са једне локације на друге. Касније се примене ове методе знатно проширила, на пример, ефикасно се користи за изналажење оптималног размештаја (запослени, просторије итд.), локације (складишта, продавница), избора најповољнијих машина за обављање рада итд.

Основу за решавање транспортних проблема поставили су је L. V. Kantorovich [38] и F. L. Hitchcock [34] у време када методологија линеарног програмирања још није била успостављена.

Постоји велики број алгоритама транспортне методе. Код неких се мора, претходно, наћи почетно решење, па тек његовим побољшањем доћи до оптималног. Код других није потребно формирати почетно решење.

Најчешће се, када је већ одређено почетно допустиво решење, користе метода „Stepping stone“, Модификована (Modi) метода, и Ford–Fulkerson метода. За потребе утврђивања почетног допустивог решења најчешће се користи Вогелова апроксимативна метода.

Stepping-stone или дистрибуциона метода полази од почетног допустивог решења проблема. Процес отпочиње израчунавањем релативних трошкова за свако незаузето поље табеле. Релативни трошкови показују за колико би се смањили или повећали трошкови транспорта ако би се једна јединица транспортовала преко датог поља. Позитивни релативни трошкови указују на повећање трошкова, а негативни на смањење истих. Постојање негативних релативних трошкова указује да се постојећи план транспорта може побољшати. То је критеријум оптималности датог решења.

Модификована (Modi) метода је усавршена метода релативних трошкова. У овој методи је примењен једноставнији поступак за одређивање разлика $d_{ij}$. У већини случајева по модификовани методи је потребан мањи број итерација за изналажење оптималног решења, али има више посредног рачунања.

Ford – Fulkerson метода је алгоритам који рачуна максимални проток у транспортној мрежи. Метод не захтева почетно решење за изналажење оптималног плана транспорта [59].

Сви проблеми који се могу решавати транспортном методом, могу бити обухваћени једним општим моделом. Да би поставили такав модел, користи се постројење које има *m* производња и *n* потрошња.

Са $x_{ij}, (i = 1,2, \dots, m; j = 1,2, \dots, n)$ означимо количине сировине које се из било ког производња *i* треба транспортовати у било коју потрошњу *j*.

Са $a_i, (i = 1,2, \dots, m)$ означава се расположива количина сировине у *i*-тој тачки производње, а са $b_j, (j = 1,2, \dots, n)$ потребна количина сировине *j*-тој тачки потрошње.

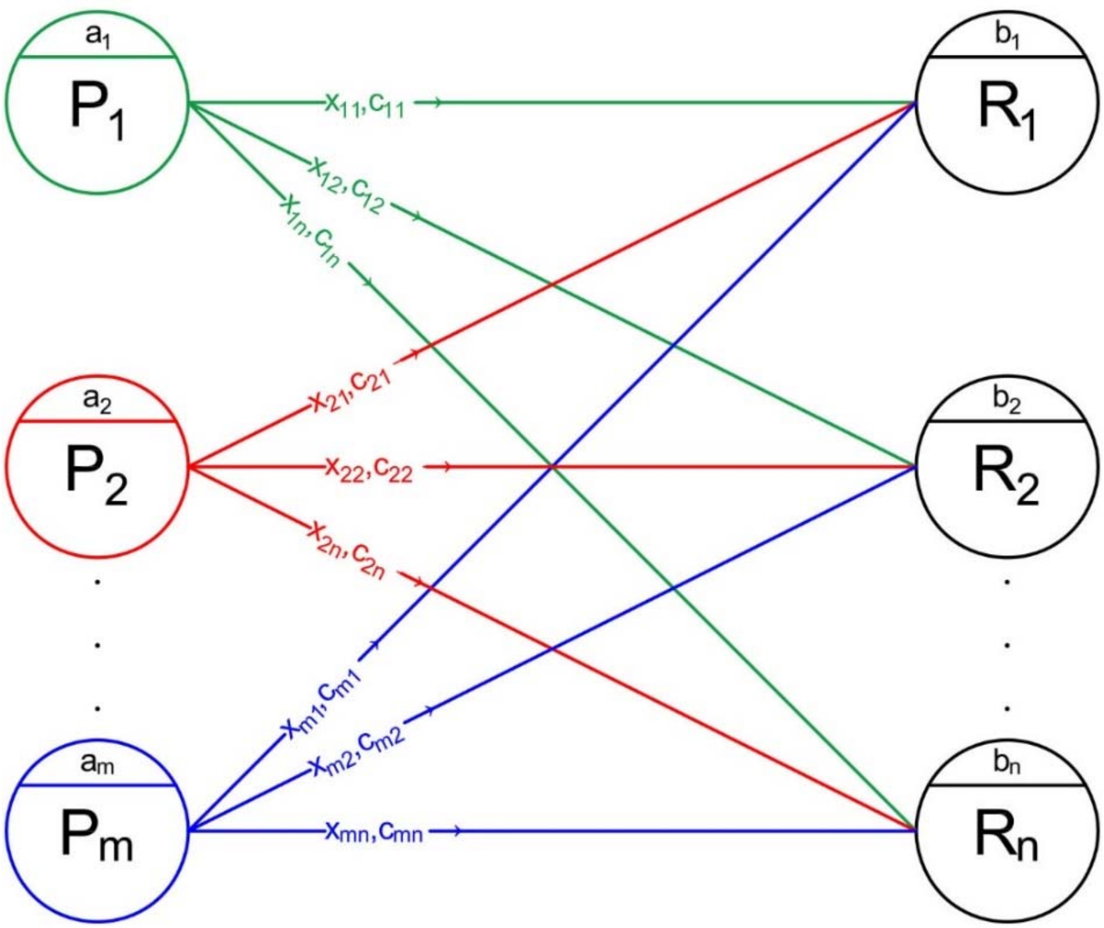
Табела ограничавајућих фактора, у општем моделу изгледа:

| Производња | Потрошња | | | | Расположива количина |
|---|---|---|---|---|---|
| | $R_1$ | $R_2$ | … | $R_n$ | |
| $P_1$ | $x_{11}$ | $x_{12}$ | … | $x_{1n}$ | $a_1$ |
| $P_2$ | $x_{21}$ | $x_{22}$ | … | $x_{2n}$ | $a_2$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | … | ⋮ | ⋮ |
| $P_m$ | $x_{m1}$ | $x_{m2}$ | … | $x_{mn}$ | $a_m$ |
| Потребна количина | $b_1$ | $b_2$ | … | $b_n$ | |

Са $c_{ij}$ се означавају трошкови превоза по јединици сировине која се из *i*-те производне транспортује у *j*-ту потрошне тачке. Табела тих трошкова по јединици сировине изгледа:

| Производња | Потрошња | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $R_1$ | $R_2$ | … | $R_n$ |
| $P_1$ | $c_{11}$ | $c_{12}$ | … | $c_{1n}$ |
| $P_2$ | $c_{21}$ | $c_{22}$ | … | $c_{2n}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | … | ⋮ |
| $P_m$ | $c_{m1}$ | $c_{m2}$ | … | $c_{mn}$ |

На слици 2.2 је приказана шема транспорта.




*Слика 2.2 Шема транспорта*

Модел примарног проблема, када су понуда и тражња изједначене (тзв. затворени транспортни проблем), има:

А) функција критеријума

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \tag{4.1}$$

Б) ограничавајуће факторе:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad (i = 1,2,\dots,m) \tag{4.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \qquad (j = 1,2,\dots,n) \tag{4.3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{4.4}$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad a_i > 0, \qquad b_j > 0. \tag{4.5}$$

Модел садржи m једначина типа (4.3), n једначина типа (4.3) и два услова (4.4) и (4.5). Од укупног броја ($m$+$n$) једначина, постоји ($m$+$n$-1) линеарно независних једначина. На основу тога, постоји ($m$+$n$-1) линеарно независних вектора који чине базу векторског простора.

У моделу се јавља ($m$+$n$) промењљивих, од којих у недегенерисаном решењу ($m$+$n$-1) мора бити позитивно, а ($m$-1)($n$-1) једнако нули. Ако има мање од ($m$+$n$-1) промењљивих са позитивном вредношћу решење је дегенерисано.

Примарном проблему транспортне методе одговара дуални проблем у коме су непознате означене са:

$$r_i, (i = 1,2,\dots,m)$$

$$k_j, (j = 1,2,\dots,n)$$

а чији се модел састоји од:

А) функција критеријума:

$$(max); g = \sum_{i=1}^{m} a_i r_i + \sum_{j=1}^{n} b_j k_j \qquad (4.6)$$

Б) ограничавајућих фактора:

$$r_i + k_j \leq c_{ij}, \qquad (i = 1,2, \dots, m), \qquad (j = 1,2, \dots, n) \qquad (4.7)$$

Дуалне промењиве се често називају: множитељима, потенцијалима или фиктивним вредностима редова ($r_i$) односно колона ($k_j$).

Модификована метода полази од дуалног модела, а води рачуна и о примарним промењивим. Све примарне промењиве морају бити ненегативне тј.

$$x_{ij} \geq 0, \qquad (i = 1,2, \dots, m), \qquad (j = 1,2, \dots, n)$$

Ограничавајући фактори дуалног проблема су:

$$r_i + k_j = c_{ij} \text{ за } x_{ij} > 0 \qquad (4.8)$$

$$r_i + k_j \leq c_{ij} \text{ за } x_{ij} = 0 \qquad (4.9)$$

Додавањем левој страни неједначине (4.9) изравнавајућу промењиву $d_{ij}$, добија се једначина:

$$r_i + k_j + d_{ij} = c_{ij} \text{ за } x_{ij} = 0$$

Одакле је утврђена вредност разлике $d_{ij}$, тј:

$$d_{ij} = c_{ij} - (r_i + k_j) \text{ за } x_{ij} = 0 \qquad (4.10)$$

Која се користи приликом проналажења оптималног решења.

Применом транспортне методе, проблем се решава у две фазе и то кроз проналажење почетног и оптималног решења.

### 2.5.6 Метода распоређивања

Проблем распоређивања представља комбинаторни модел који одабире оптимални од расположивог броја могућих комбинација. Метода припада линеарном програмирању и може се сматрати посебним обликом транспортног проблема. Предност ове методе распоређивања је да се оптимално решење проналази на једноставнији начин.

Основе метода распоређивања, или мађарске методе су разрађивали мађарски математичари D. Konig и J. Egervary (*Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen*) на основу теореме коју су доказали. У теореми се тврди:

„Ако се у матрици налазе и нуле, онда је максималан број независних нула једнак минималном броју линија које покривају све нуле.“

На основу ове теореме, H.W. Kuhn (*The Hungarian method for the assignment problem, 1955*) је развио алгоритам решења. Састоји се у распоређивању *n* активности или ресурса на m извршилаца или места, при чему се жели постићи најбоља ефикасност. Полази се од тога да се једна активност може доделити само једном извршиоцу, као и да је позната ефикасност *i*-тог извршиоца на *j*-тој активности ($c_{ij}$). Циљ који се жели постићи може бити: најкраће време за извршење пројекта, најнижи укупни трошкови, најкраћи укупни путеви, највећа добит и слично [31].

Математички модел за проблеме распоређивања идентичан је моделу од (4.1) до (4.5) само што је у овом случају:

$$a_i = 1 \text{ за свако } i$$

$$b_i = 1 \text{ за свако } j$$

Разлика је још и у томе, што матрица за проблеме распоређивања мора бити квадратна и што променљиве могу узимати вредност нула или један. Положај независне нуле у матрици одређује променљиву која ће имати вредност један.

Овај модел постиже најповољније ефекте када је реч о распоређивању послова на радна места, односно на раднике или машине, избор кандидата са конкурса у циљу запослења итд.

# 3. ОДЛУЧИВАЊА У РУДАРСТВУ ПРИМЕНОМ ЛИНЕАРНИХ МОДЕЛА

При одлучивању код решавања разноврсних проблема у рударству, као веома дисперговане научне, инжењерске и привредне гране, проналажење оптималног решења није само императив постизања успешног исхода већ и задатак неопходног познавања и препознавања оптимизационог приступа међу методама операционих истраживања, који треба да буде усклађен са проблемом. У скупу оптимизационих метода операционих истраживања, модели линеарног програмирања истичу се у практичној примени због решивости, односно јасно дефинисане структурне метрике и погодних алгоритамских поступака.

Више је класификација модела линеарног програмирања, према целобројности променљивих деле се на *нецелобројне* и *целобројне*, према алгоритму решавања на *симплекс, транспортну* или *методу распоређивања*, зависно од промена стања и функционисања моделираног реалног система, модел може бити *статички* или *динамички*, што са аспекта примене линераних модела у решавању рудничких проблема, може бити опредељујуће за избор приступа али не и за конструкцију модела.

*Статички модели* погодни су за тражење оптималних решења рудничких проблема ограниченог трајања на један период, нпр. оптималне производње у одређеним условима у датом периоду. Временско трајање периода је релативно, може бити краће или дуже, месец, више месеци, једна година или више година, лимитирајући чинилац за период је непромењивост услова, нпр. цена корисне минералне сировина, концентрата или метала на тржишту у посматраном периоду, услови пословања итд. За доносиоца одлуке анализа ограничена на један период има повољност у смислу поузданијег сагледавања, избора и детерминације утицајних чинилаца и ограничења. Врло значајна је и могућност одређивања границе промењивости тих елемената, у оквиру које неће доћи до поремећаја стабилности оптималног решења.

*Динамички модели* намењени су трагању за оптималним решењима рудничких проблема када је промењивост услова присутна. Оптимизациона анализа своди се на период у коме је више интервала постојаних услова, односно на статичку анализу по интервалима у посматраном периоду.

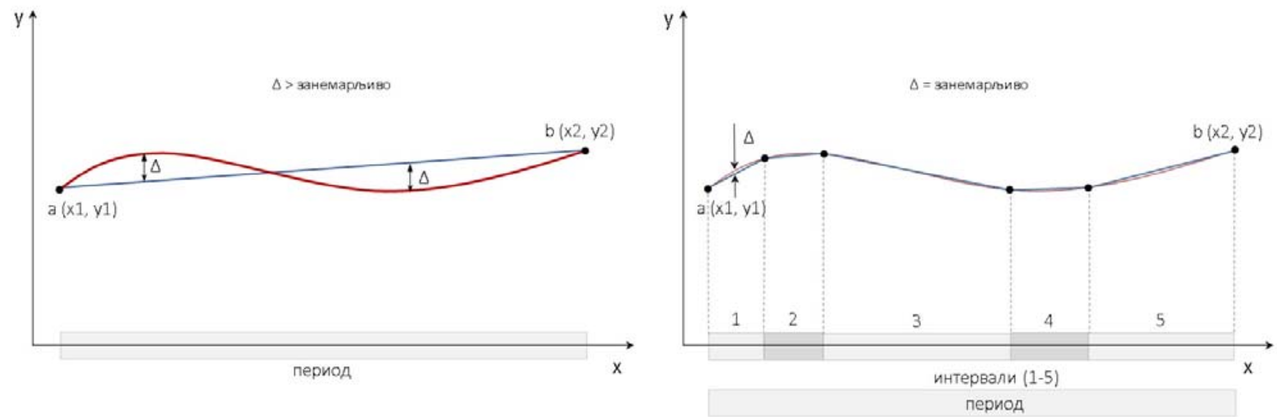
Динамичко моделирање је захтевније, оно тражи дефинисање услова прелаза, односно интеракције између интервала по редоследу, нпр. промена садржаја корисне компоненте у руди са развојем експлоатационих радова у руднику, или нпр. планирано поступно увођење нове опреме и машина до постизања задатог капацитета рудника. Структурно динамички модели нису ништа друго до обједињени низови статичких модела са дефинисаним међу условима.

У рударству, односно у већини рудничких проблема присутан је услов простора, то је случај и са тест експерименталним истраживањима у оквиру дисертације, што истиче и даје значај *локацијским линеарним моделима*. У овој групи оптимизационих проблема, осим услова и ограничења која фигуришу у статичким и динамичким моделима придружује се услов простора, просторне дистрибуираности, односно локације квантитативног обележја – чиниоца као елемента модела, нпр. просторни размештај лежишта са различитим квалитетом руде у производном систему са више рудника итд.

Оптимална решења према моделима из ове фамилије, доносиоцу одлуке пружају шире могућности за опредељење, поред услова по интервалима и периодима као у статичким и динамичким моделима, прикључују просторни – локацијски распоред. Елементи локацијских модела су: критеријум оптималности, услови - ограничења и локацијска обележја.

Прихватљивост, поједини аутори називају одрживост, линеарног модела зависи од одступања између стварне и линеарне зависности моделских параметара, у пракси има случајева да се ова зависност не може коректно описати линеарном функцијом.

Линеарни модел је прихватљив уколико је одступање мало, ако овај услов није задовољен, прибегава се парцијалној линеаризацији нелинеарне зависности, слика 3.1, или је израчунато „оптимално“ решење оријентационог карактера.




Слика 3.1, Парцијална линеаризација [89]

Који ће модел линеарног програмирања бити коришћен у решавању проблема зависи од природе проблема, броја непознатих, критеријума и ограничења. Ниједан модел линеарног програмирања није толико савршен да добијено решење треба прихватити без критичког односа [89].

Примена линеарног програмирања започиње идентификацијом и параметризацијом проблема, утврђивањем линеарности веза релевантних параметара и избором типа модела погодног за решавање проблема. Следи формирање модела и израчунавање базичног оптималног решења [89].

Модели су „слепи“ за оцену документованости улазних података, познато је да од поузданости и ваљаности података којим се модел нахрани зависи резултат израчунавања, а то значи да исходно решење може бити стварно или квази оптимално. Зато је неопходна опрезност и претходна пажљива провера улазних података, нарочито уколико изворно нису проверени или су искуствено и аналогно дефинисани [89].

Од свих математичког-моделских приступа операционих истраживања модели линеарног програмирања су најшире примењивани. Више је разлога за то, један је дефинисаност алгоритамских процедура, други је једноставност примене, трећи је делотворност, четврти богатство литературе и пети понуда и доступност софтвера [89].

У рударству у свету, почеци примене модела линеарног програмирања датирају крајем педесетих година на планирању производње у рудницима угља (извор: Charles B. Manula, „Application of linear programming methods to mine planning and scheduling“, Special report of research conducted in Department of Mining College of Mineral Industries The Pennsylvania State University, 1965, 34 p.). На нашим просторима први озбиљан искорак направљен је 1975. магистарским радом Слободана Вујића „Оптимизација технолошких процеса у површинској експлоатацији применом линеарног програмирања“ и публикацијом истог аутора и В. Радевића под називом „Методе оптимизације - примена линеарног програмирања у површинској експлоатацији“, Универзитет у Београду Рударско-геолошки факултет 1976, 85 стр.

Професор С. Вујић истиче: „Решавањем рудничких проблема линеарним програмирањем, предиспонира се избор најповољнијег решења у амбијенту са бројним ограничењима: природним, просторним, техничким, технолошким, еколошким, тржишно-економским и другим. У планирању, пројектовању и оперативном рудничком одлучивању, линеарно програмирање се користи за математичко моделовање реалног система, за сагледавање његовог понашања, тумачење, аргументовање, поређење и предвиђање. Коришћењем линеарног програмирања повећава се ефикасност и аналитичност рада инжењера, подиже поузданост одлучивања, а ризици погрешних претпоставки и лоших одлука минимизирају”.

Примене модела линеарног програмирања у рударству немају лимеса, немогуће је побројати све примене без ризика да листа побројавања неће бити целовита. Према проф. Вујићу, листа у наставку коју наводимо није коначна, она пре свега говори о потенцијалима примењивости модела линеарног програмирања у рударству:

- планирање и оптимизација производње,
- усклађивање планова производње,
- синхронизација производње сложених система са више рудника
- хомогенизација и управљање квалитетом руде,

- избор опреме и машина,
- распоређивање машина,
- оптимизација транспортне трасе,
- оптимизација дистрибуције и транспорта,
- оптимизација залиха минералних сировина,
- оптимизација залиха материјалних ресурса и енергената,
- оптимизација утрошка енергената, потрошног материјала и резервних делова,
- усклађивање и распоређивање послова на извршиоце,
- оптимизација рекултивације предела деградираног рударским радовима,
- оптимизација биљних врста за биолошку рекултивацију,
- оптимизација структуре, планирање и избор кадрова,
- избор оптималног решења у пројектном и оперативном одлучивању,
- оптимизација сервисних (радионичких) капацитета рудника,
- планирање исхране и набавке прехрамбених намирница за рудник,
- избор понуђача у тендерском поступку,
- управљање инвестицијама, итд.

Проф. Вујић објашњава нове тенденције и унапређења оперативности модела линеарног програмирања следећим речима: „Реалне проблеме у рударству карактерише непотпуна параметарска одређеност, недовољна прецизност података или неизвесност будућих активности и догађања, што је последица сложених утицаја и стохастичке променљивости природних, техничких, технолошких, тржишних, привредних, политичких, еколошких и других услова. У оваквом амбијенту детерминистички модели линеарног програмирања су мање или више успешне апроксимације реалних проблема, те и поред неоспорних успеха и користи од њихових примена они показују немоћ пред проблемима у којима је присутна недовољна одређеност, непрецизност или неизвесност. Уочена мана детерминистичких модела подстакло је развој посебних техника са циљем прилагођавања линеарног програмирања за решавање задатака у којима је присутна неодређеност. Идеја са овим техникама није сасвим успела, пре свега због њихове концепцијске усмерености ка сагледавању последица релативно малих промена полазних параметара“ и у наставку истиче „Ова сазнања су побудила и иницирала развој алтернативних приступа, тзв. метода *soft computing-a,* које су основи своје идеје толерантне на непрецизност, несавршеност, неодређеност или неизвесност. Најзначајнији приступ је заснован на концепту такозваних *расплинутих* или *фази* скупова (Задех 1965), позната као *теорија могућности.* У фази приступу се за меру неодређености користи степен испуњености одређених услова, односно степен припадности елемента параметарском скупу. Имплементацијом фази философије у моделе линеарног програмирања омогућено је успешно решавање реалних проблема са параметрима које карактерише расплинутост.“

# 4. ТЕСТ ЕКСПЕРИМЕНТАЛНА ИСТРАЖИВАЊА И АНАЛИЗА РЕЗУЛТАТ

## 4.1 УВОДНИ ОПИС ТЕСТ ЕКСПЕРИМЕНТАЛНОГ ПРОБЛЕМА

На територији Македоније додељено је преко 360 концесија за експлоатацију минералних сировина, од чега је више од 30% концесија кречњака. За почетак, ово је одлична основа за израду модела који би могао да помогне за оптималну производњу и пласмана, као и потребу од будућим концесијама или повећањем - смањењем капацитета постојећих.

Експлоатација, прерада и потрошња кречњака заузима запажено место у националној економији Македоније. Укупна годишња производња већа је од 3,5 милиона тона, а потрошња око 2,8 милиона тона кречњака, што је сразмерно привредним потенцијалима земље велика производња и потрошња.

Кречњаци покривају велики део територије Републике Македоније. Углавном се користе у грађевинарству, али неке се користе и за потребе металургије, хемијске индустрије, прехрамбене индустрије и других.

На основу тренутног нивоа знања о лежиштима кречњака на територији Републике Македоније, могу се издвојити у следећим регионима:

- доломитни калцитни мермери Пелагонијског масива,
- западно-македонско подручје,
- кречњаци у вардарској зони.

У овом тест-експерименталном истраживању узимају се у обзир каменоломи кречњака са годишњом производњом већом од 50.000 t.

Двадесет и девет површинских копова на којима се експлоатише кречњак, са годишњим производним капацитетима 50.000 – 450.000 t, готово је равномерно распоређено на територији земље, слика 4.1.

Производни трошкови кречњака на површинским коповима релативно су уједначени 300 – 400 н.ј. (н.ј. – новчана јединица). Да би избегло прерачунавање трошкова у локалној валути (денар) у вредност неке од светских валута, користи се термин новчана јединица (н.ј.). Ово не утиче на израчунавања и нема значаја за исход анализе.

На 15 локација, градова и већих урбаних средина, слика 4.1, такође су релативно равномерно просторно распоређени (значајнији) потрошачи кречњака у Македонији, чије су појединачне годишње потребе за кречњаком 50.000 – 950.000 t.

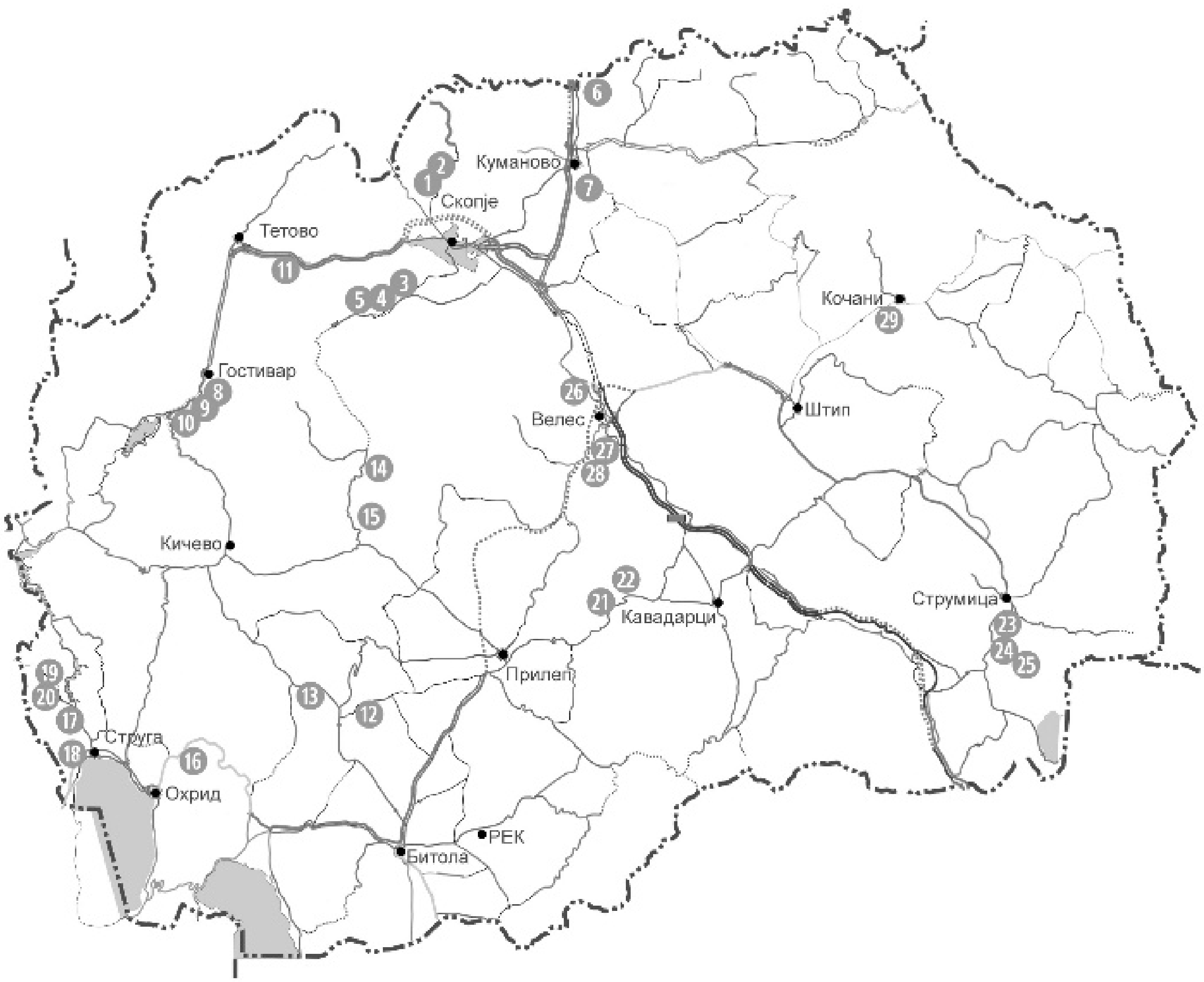
Развијена мрежа путева обезбеђује комуникациону повезаност свих површинских копова и потрошача кречњака. Зависно од растојања између површинских копова и потрошача, трошкови превоза по тони кречњака износе 9 – 831 н.ј., а локацијски трошкови 409 – 1231 н.ј./t.

Бројност лежишта кречњака и површинских копова на којима се експлоатише, изразите разлике појединачних производних капацитета, потрошачких потреба за кречњаком и локацијских трошкова, покрећу питање рационализације броја ентитета у систему, односно локацијске оптимизације експлоатације и потрошње кречњака у Македонији. Питање није академско већ практично значајно макроекономски, развојно, еколошки, урбано, социјално, плански дугорочно за уравнотежено и рационално газдовање кречњаком као минералним ресурсом чије резерве и ако велике нису неисцрпне.

Сценарио анализе проблем посматра у две опције: Прва опција односи се на постојеће стање система са 29 производних и 15 ентитета потрошње. Друга опција претпоставља да ће са увођењем одсумпоравања гасова сагоревања, Термоелектрана

Битољ годишње трошити око 300.000 t кречњака. Термоелектрана би као 16-ти ентитет потрошње повећала садашње укупне потребе за 11%.

У наставку приказани су формални математички и нумерички локацијски модел производње и потрошње кречњака у Македонији, резултати анализе, оцена и закључак.




*Слика 4.1, Локације површинских копова и потрошача кречњака у Македонији*

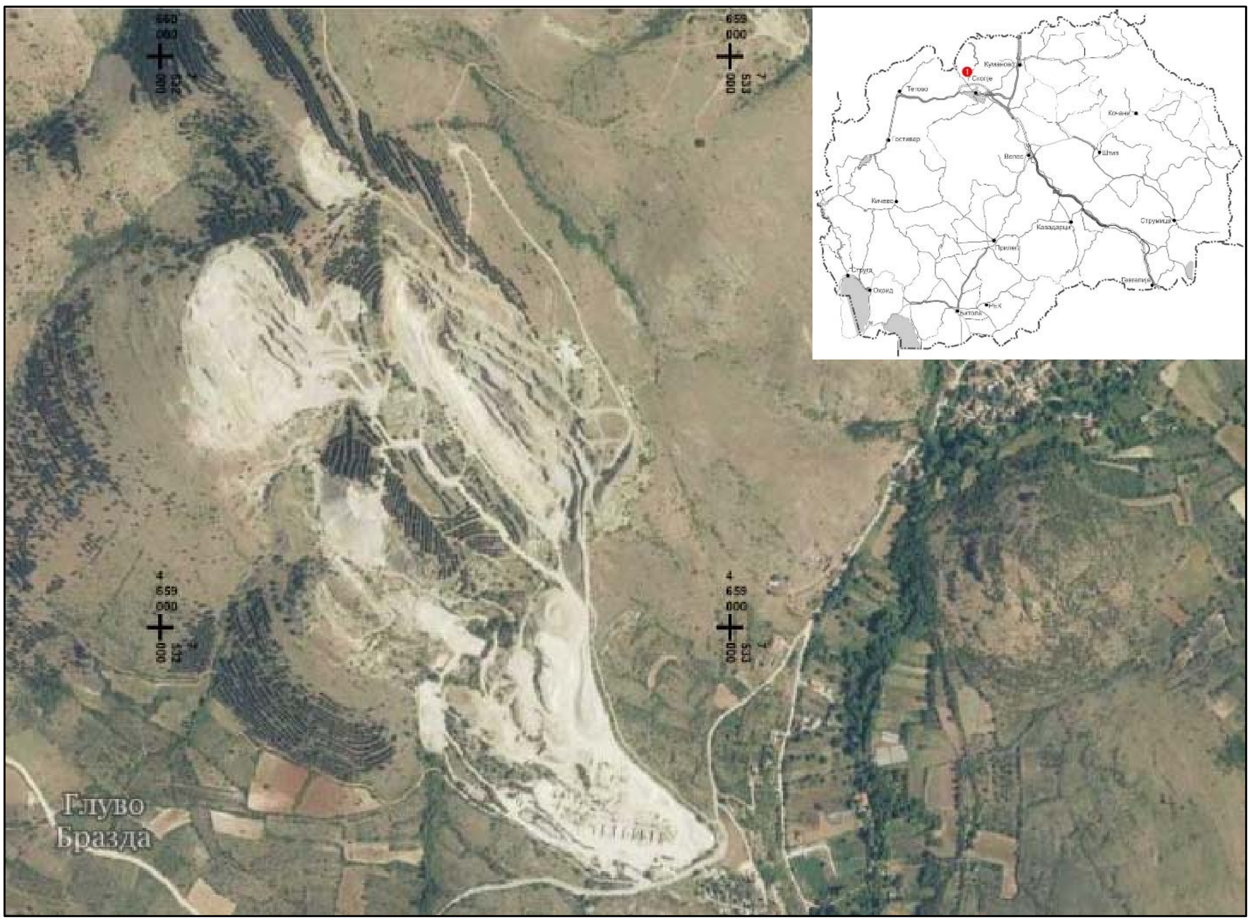
Тумач: локације површинских копова кречњака маркиране кружићима са бројевима еквивалентним редним бројевима у табелама 4.2, 4.3 и 4.4.

## 4.2 ЕНТИТЕТИ ПРОБЛЕМА

Од $R_1$ до $R_{29}$ дате су главне карактеристике површинских копова.

### $R_1$ – Површински коп „Бразда“ – о. Чучер Сандево

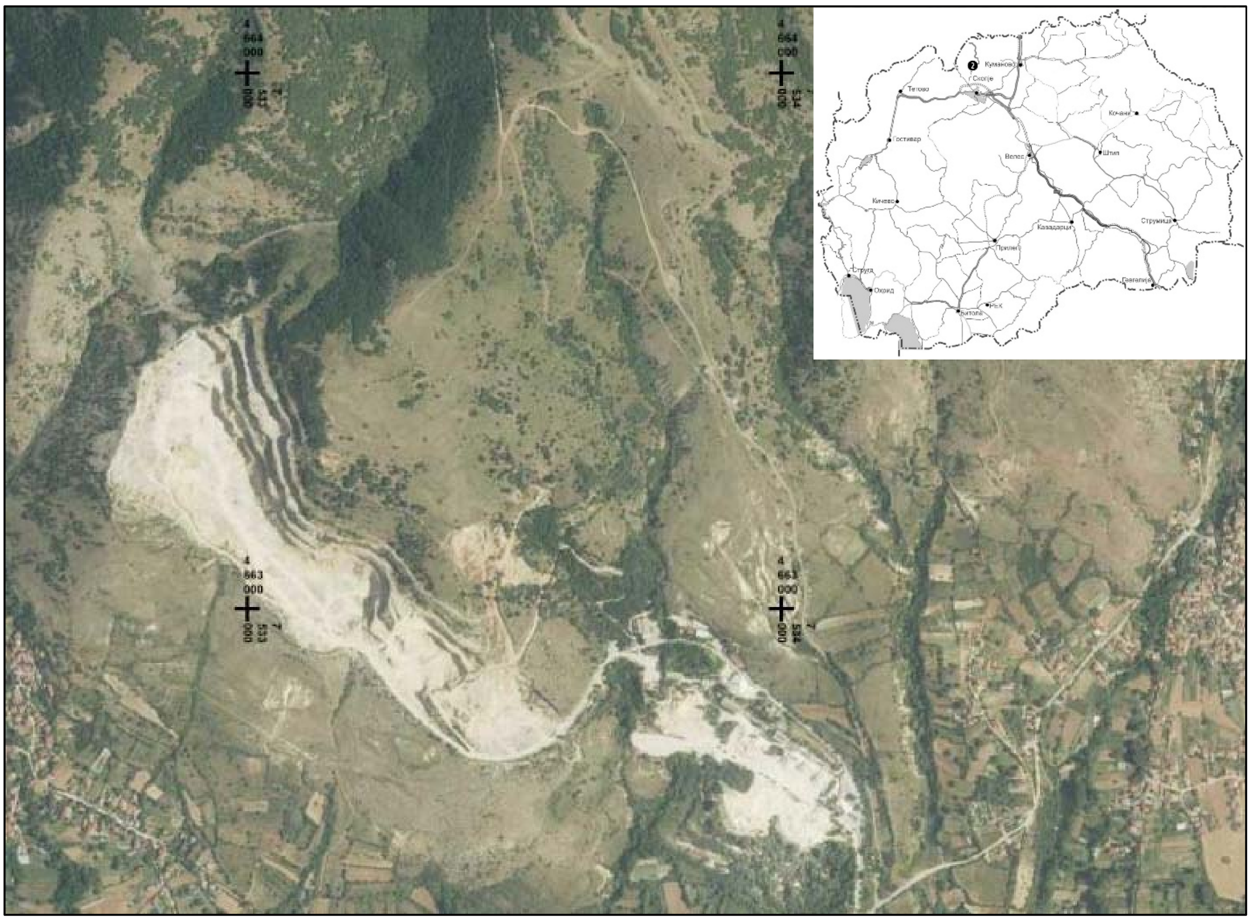
Површински коп „Бразда” налази се северозападно од Скопља у непосредној близини села Бразда, а административно припада општини Чучер Сандево. Од Скопља је удаљен 15 km. омуникацијска мрежа је добра, а до каменолома се долази поред асфалтираног пута. Садржај $CaCO_3$ је 50,14 %. Годишње се производи 100.000 t кречњака, а максимални годишњи капацитет је 250.000 t.




*Слика 4.2 Локација површинског копа „Бразда“, АКН 2019.*

**$R_2$ - Површински коп „Бањани“ – о. Чучер Сандево**

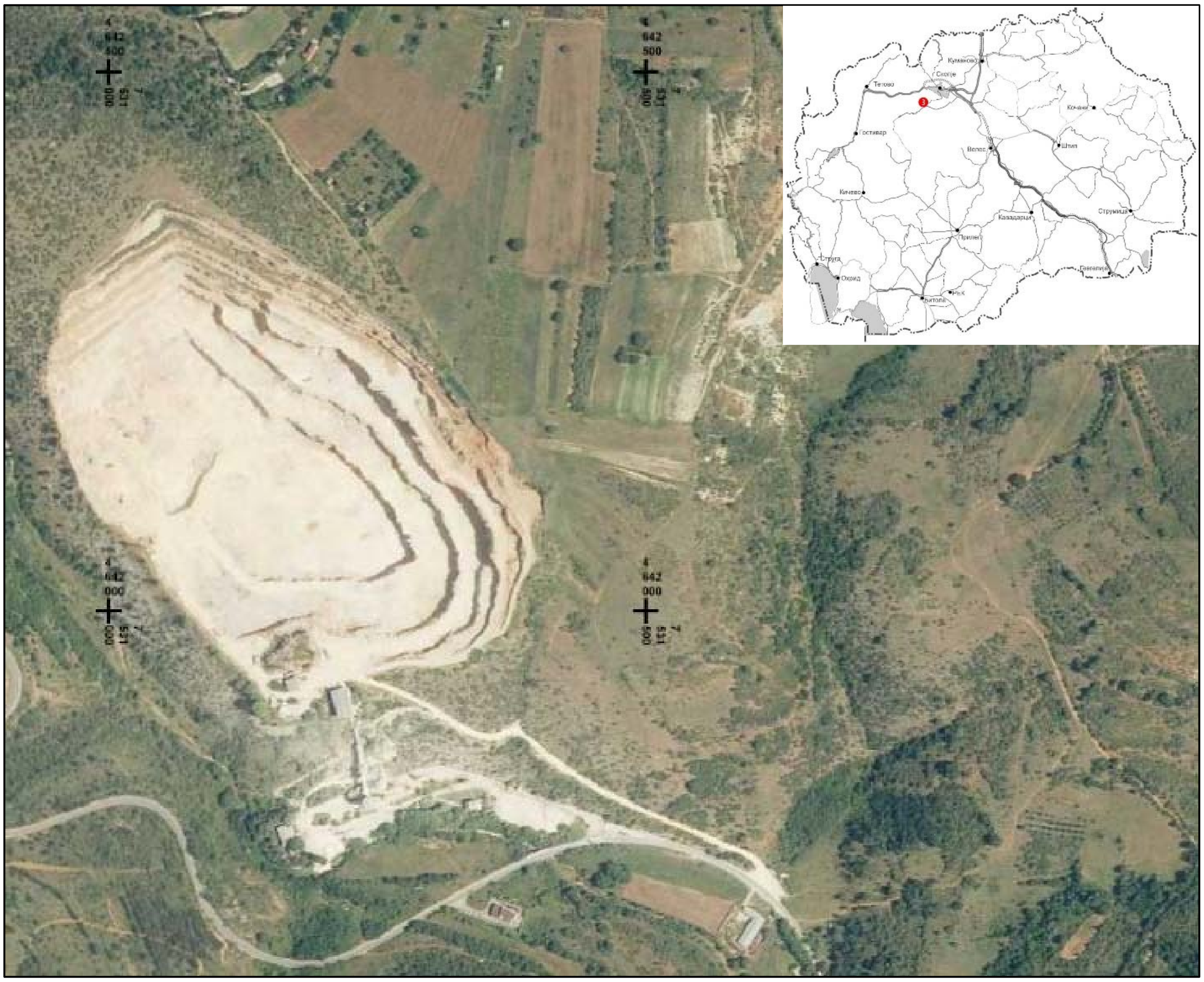
Површински коп „Бањани” налази се северозападно од Скопља у непосредној близини села Бањане и Мирковци, а административно припада општини Чучер Сандево. Од Скопља је удаљен 21 km. Комуникацијска мрежа је добра, а до каменолома се долази поред асфалтираног пута. Садржај $CaCO_3$ је 88,55 %. Годишње се производи 200.000 t кречњака, а максимални годишњи капацитет је 600.000 t.



*Слика 4.3 Локација површинског копа „Бањани“, АКН 2019.*

## R3 - Површински коп „с. Говрлево“ – о. Сопиште

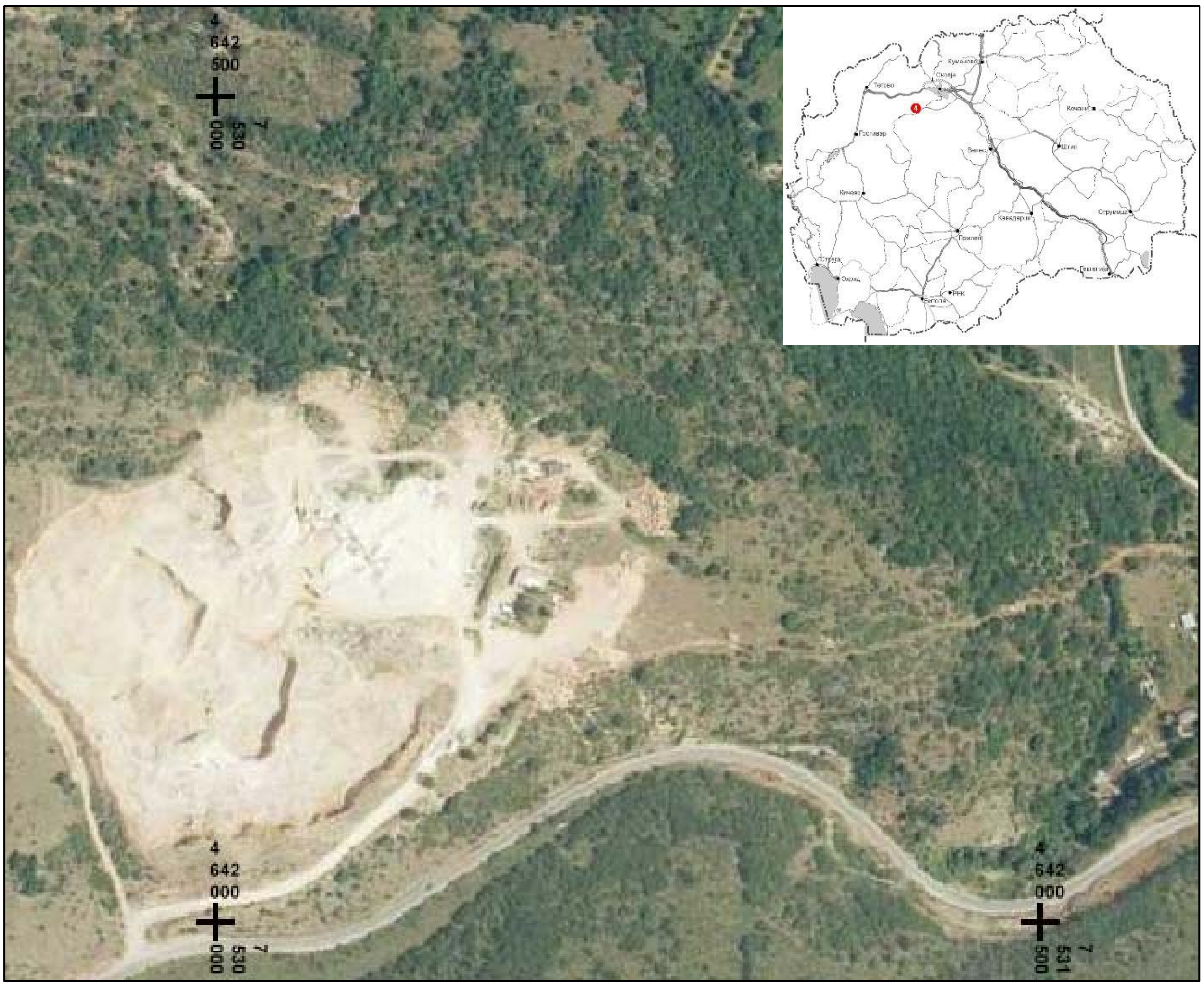
Површински коп „с. Говрлево” налази се југозападно од Скопља у непосредној близини села Долно Соње и Говрлево, а административно припада општини Сопиште. Од Скопља је удаљен 22 km. Комуникацијска мрежа је повољна јер се налази поред магистралног пута. Садржај $CaCO_3$ је 98,10 %. Годишње се производи 450.000 t кречњака, а максимални годишњи капацитет је 700.000 t.



*Слика 4.4 Локација површинског копа „с. Говрлево“, АКН 2019.*

**R4 - Површински коп „Зелениковец“ – о. Сопиште**

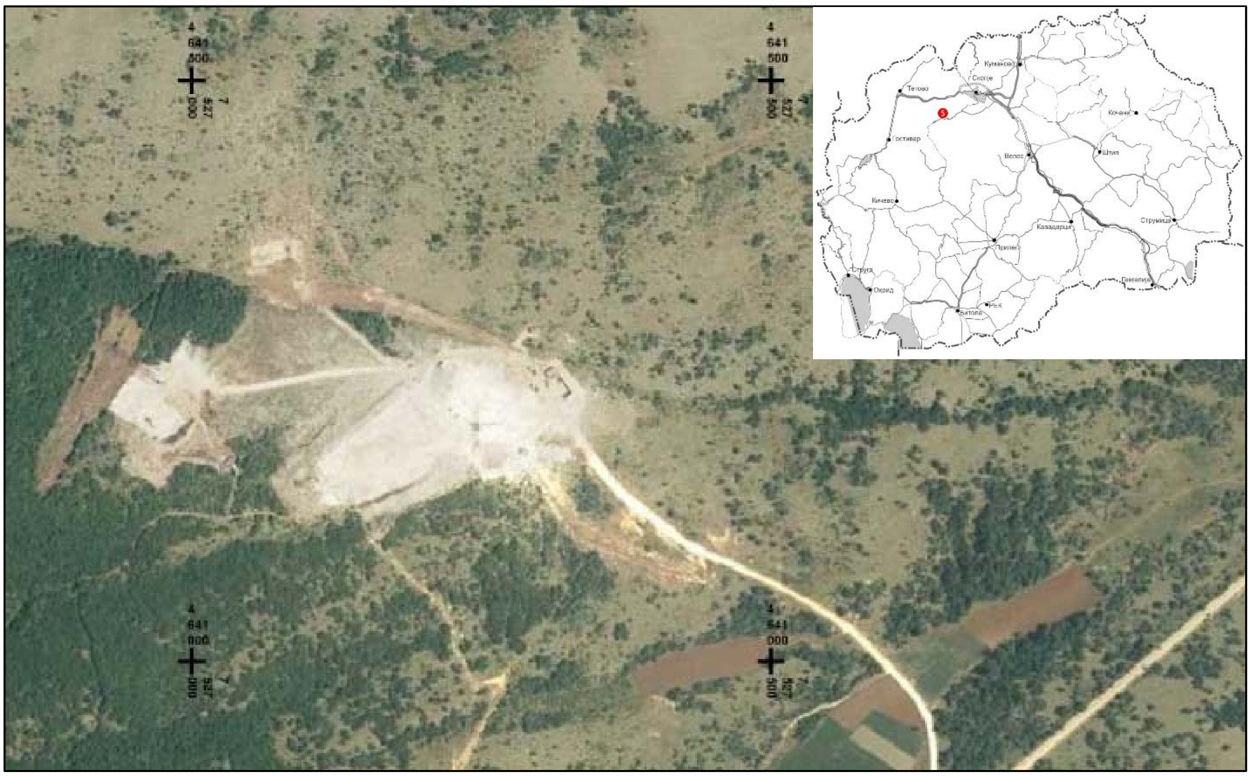
Површински коп „Зелениковец” налази се југозападно од Скопља у непосредној близини села Говрлева, а административно припада општини Сопиште. Од Скопља је удаљен 23 km. Комуникацијска мрежа је повољна јер се налази поред магистралног пута. Садржај $CaCO_3$ је 98,44 %. Годишње се производи 150.000 t кречњака, а максимални годишњи капацитет је 300.000 t.




*Слика 4.5 Локација површинског копа „Зелениковец“, АКН 2019.*

## R5 - Површински коп „Горна Краста“ – с. Сопиште

Површински коп „Горна Краста” налази се југозападно од Скопља у близини села Говрлева, а административно припада општини Сопиште. Од Скопља је удаљен 26 km. Комуникацијска мрежа је повољна јер се налази поред магистралног пута. Садржај $CaCO_3$ је 98,40 %. Годишње се производи 50.000 t кречњака, а максимални годишњи капацитет је 150.000 t.




*Слика 4.6 Локација површинског копа „Горна Краста“, АКН 2019.*

**R6 - Површински коп „Сопот“ – о. Куманово**

Површински коп „Сопот” налази се у северној Македонији у непосредној близини села Сопот, а административно припада општини Куманово. Од Скопља је удаљен 54 km, а од Куманова 15 km. Комуникацијска мрежа је добра, а до каменолома се долази поред асфалтираног пута. Садржај $CaCO_3$ је 98,00 %. Годишње се производи 100.000 t кречњака, а максимални годишњи капацитет је 200.000 t.


*Слика 4.7 Локација површинског копа „Сопот“, АКН 2019.*

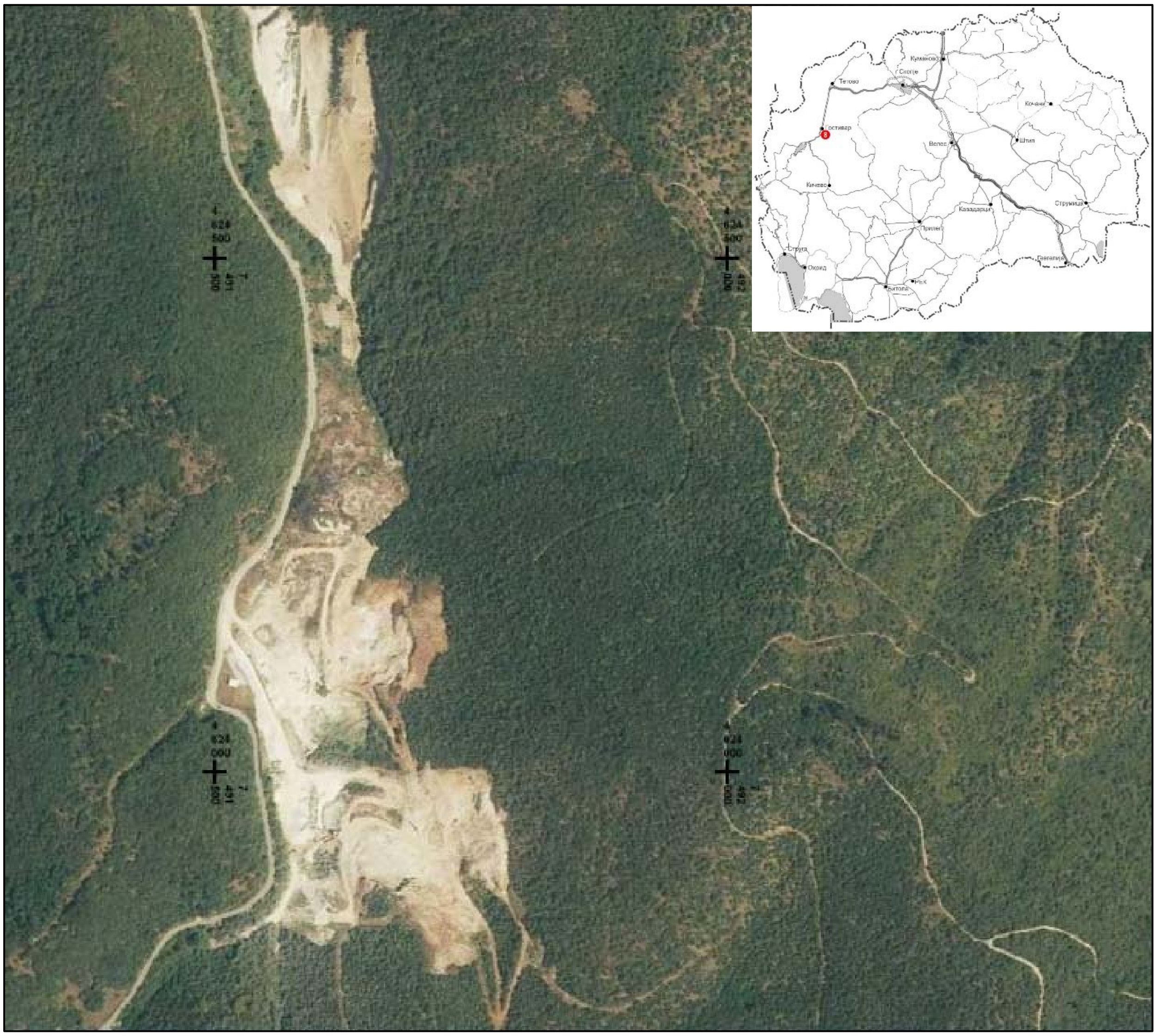
## R7 - Површински коп „Краста“ – о. Куманово

Површински коп „Краста” налази се јужно од Куманова у близини села Биљановце, а административно припада општини Куманово. Од Скопља је удаљен 43 km, а од Куманова 12 km. Комуникацијска мрежа је добра, а до каменолома се долази поред асфалтираног пута. Садржај $CaCO_3$ је 97,15 %. Годишње се производи 150.000 t кречњака, а максимални годишњи капацитет је 300.000 t.


*Слика 4.8 Локација површинског копа „Краста“, АКН 2019.*

**R8 - Површински коп „с. Горна Бањица“ – о. Гостивар**

Површински коп „с. Горна Бањица” налази се јужно од Гостивара у непосредној близини села Горна Бањица, а административно припада општини Гостивар. Од Скопља је удаљен 72 km, а од Гостивара 7 km. Комуникацијска мрежа је добра, а до каменолома се долази поред асфалтираног пута. Садржај $CaCO_3$ је 86,74%. Годишње се производи 100.000 t кречњака, а максимални годишњи капацитет је 300.000 t.



*Слика 4.9 Локација површинског копа „с. Горна Бањица“, АКН 2019.*

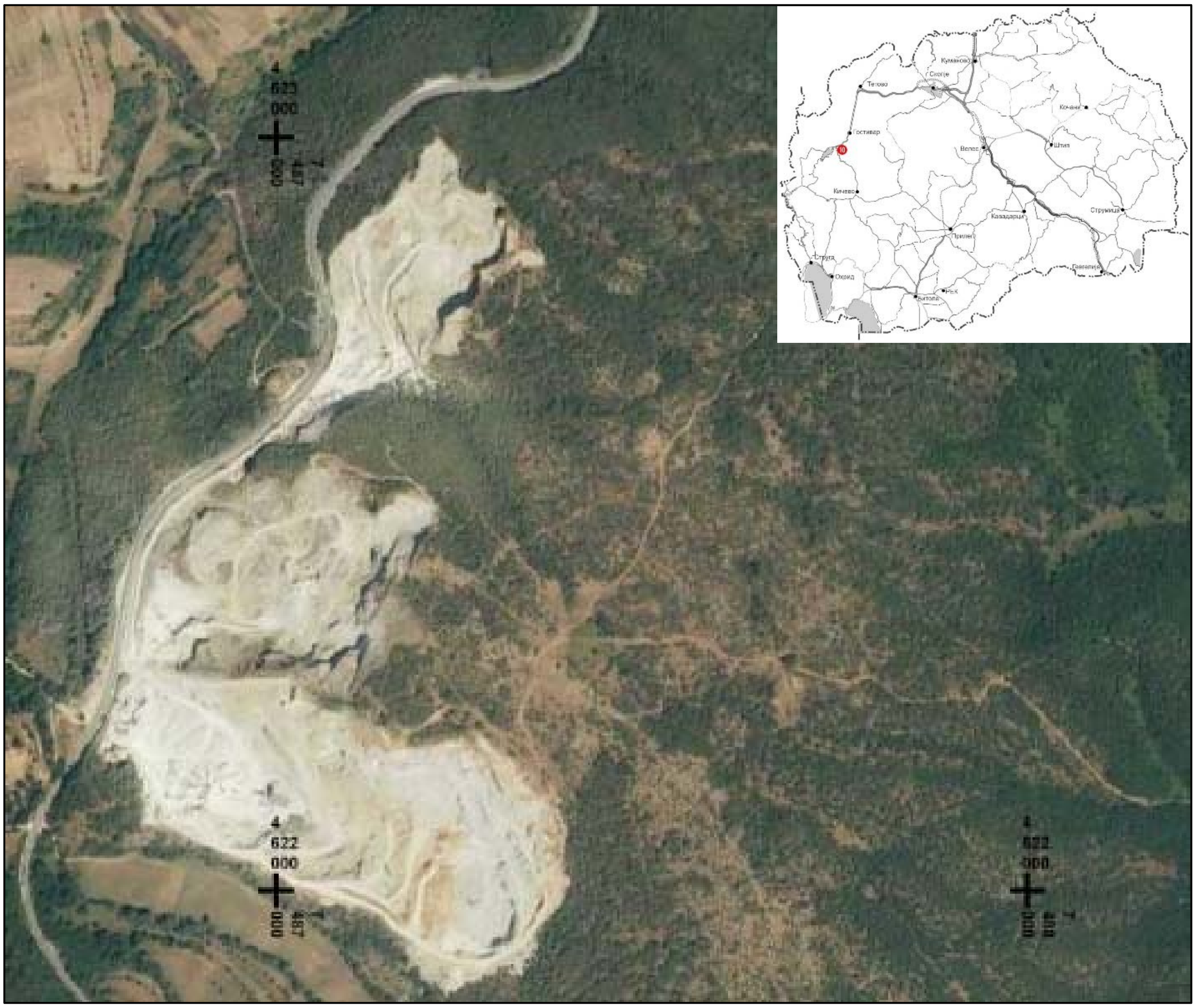
## R9 - Површински коп „Краста-2“ – о. Гостивар

Површински коп „Краста-2” налази се југозападно од Гостивара поред магистралног пута Гостивар - Кичево, а административно припада општини Гостивар. Од Скопља је удаљен 71 km, а од Гостивара 7 km. Комуникацијска мрежа је повољна јер се налази поред магистралног пута. Садржај $CaCO_3$ је 99,00%. Годишње се производи 150.000 t кречњака, а максимални годишњи капацитет је 350.000 t.

*Слика 4.10 Локација површинског копа „Краста-2“, АКН 2019.*

## R10 – Површински коп „Краста“ – о. Гостивар

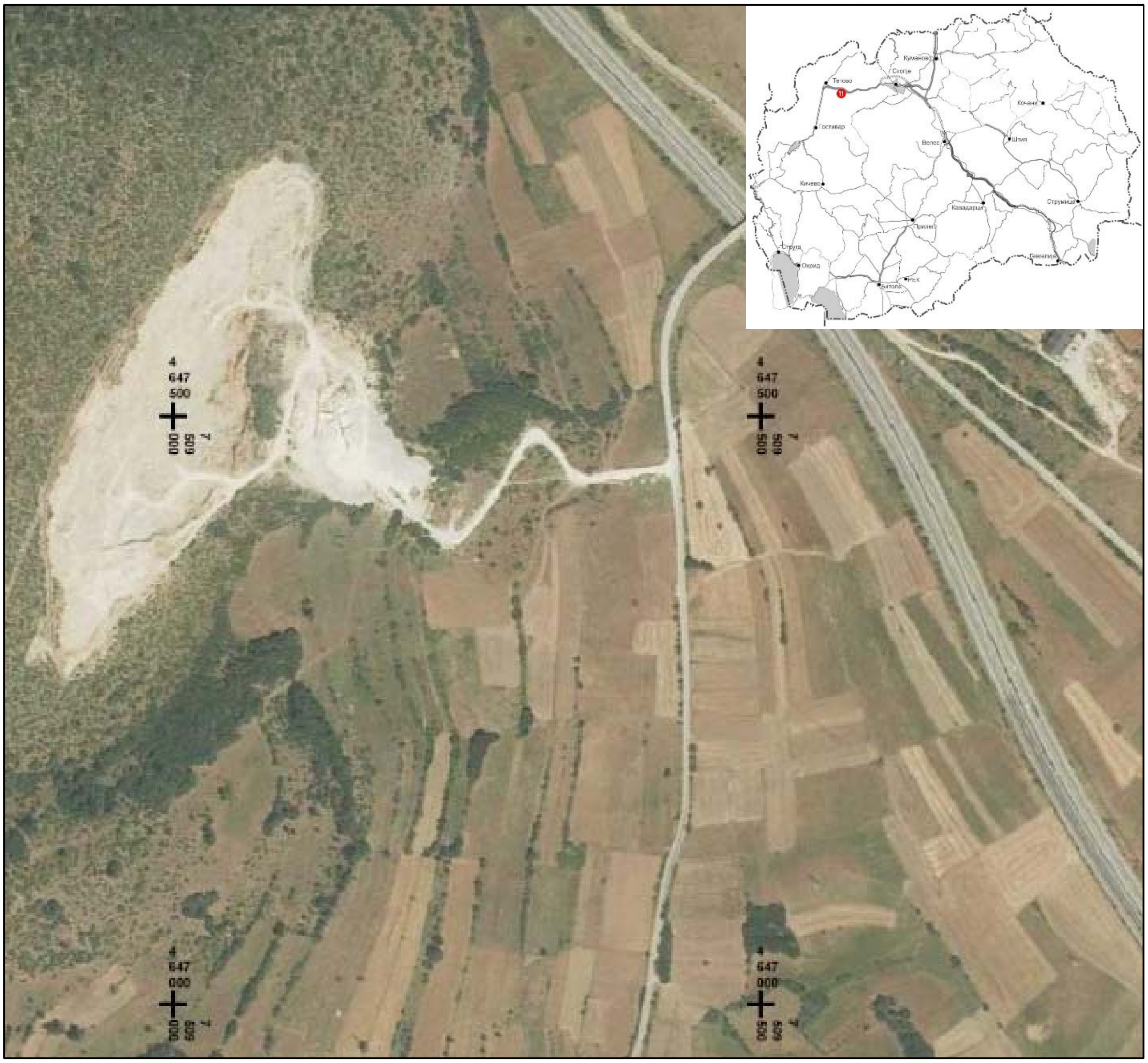
Површински коп „Краста” налази се југозападно од Гостивара поред магистралног пута Гостивар - Кичево, а административно припада општини Гостивар. Од Скопља је удаљен 74 km, а од Гостивара 10 km. Комуникацијска мрежа је повољна јер се налази поред магистралног пута. Садржај $CaCO_3$ је 98,50%. Годишње се производи 200.000 t кречњака, а максимални годишњи капацитет је 350.000 t.




*Слика 4.11 Локација површинског копа „Краста“, АКН 2019.*

## R11 - Површински коп „Добарски жеден“ – о. Желино

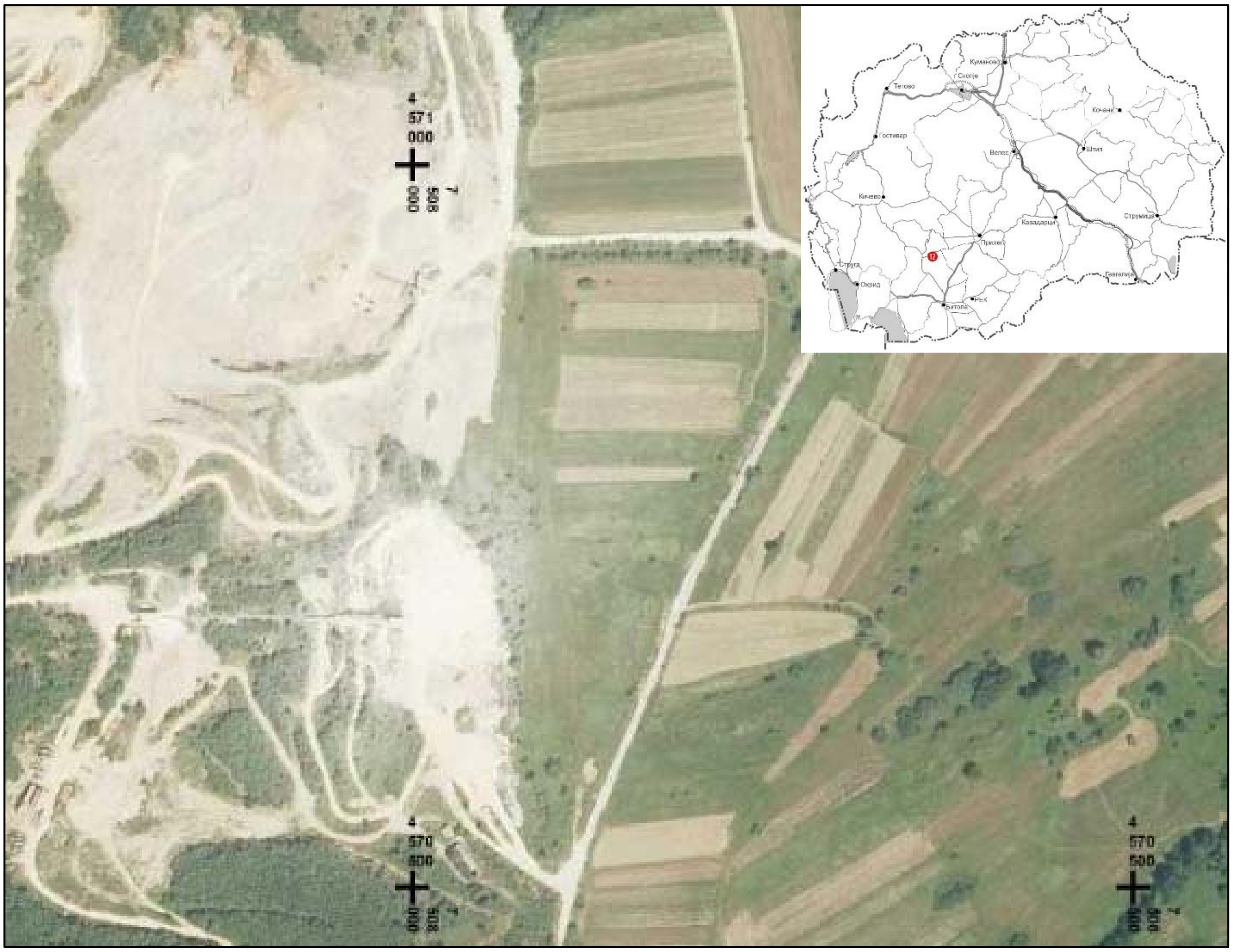
Површински коп „Добарски жеден” налази се источно од Тетова, поред аутопута Скопље - Тетово, у близини села Добарце, а административно припада општини Желино. Од Скопља је удаљен 30 km, а од Тетова је удаљен 13 km. Комуникацијска мрежа је повољна јер се налази поред аутопута. Садржај $CaCO_3$ је 96,10%. Годишње се производи 200.000 t кречњака, а максимални годишњи капацитет је 350.000 t.




*Слика 4.12 Локација површинског копа „Добарски жеден“, АКН 2019.*

### R12 - Површински коп „Слоешница“ – о. Демир Хисар

Површински коп „Слоешница” налази се у југозападној Македонији у непосредној близини села Слоештица, а административно припада општини Демир Хисар. Од Скопља је удаљен 141 km, од Кичева 32 km, а од Прилепа 37 km. Комуникацијска мрежа је добра, а до каменолома се долази поред асфалтираног пута. Садржај $CaCO_3$ је 96,40 %. Годишње се производи 115.000 t кречњака, а максимални годишњи капацитет је 150.000 t.



*Слика 4.13 Локација површинског копа „Слоешница“, АКН 2019.*

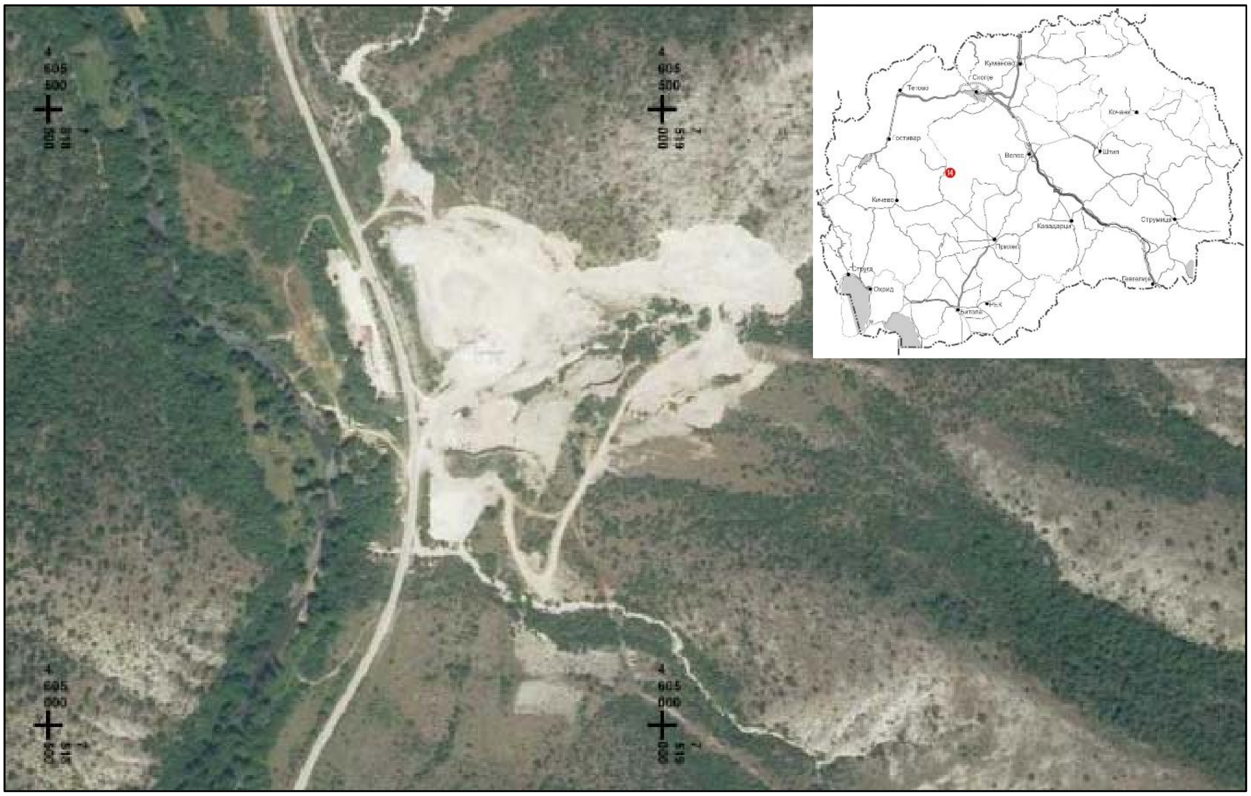
## R13 - Површински коп „Топлица“ – о. Демир Хисар

Површински коп „Топлица” налази се у југозападној Македонији у близини села Жван и Слоештица, а административно припада општини Демир Хисар. Од Скопља је удаљен 148 km, а од Кичева 38 km. Комуникацијска мрежа је добра, а до каменолома се долази поред асфалтираног пута. Садржај $CaCO_3$ је 96,50 %. Годишње се производи 85.000 t кречњака, а максимални годишњи капацитет је 200.000 t.


*Слика 4.14 Локација површинског копа „Топлица“, АКН 2019.*

## R14 - Површински коп „с. Драгов Дол“ – о. Македонски Брод

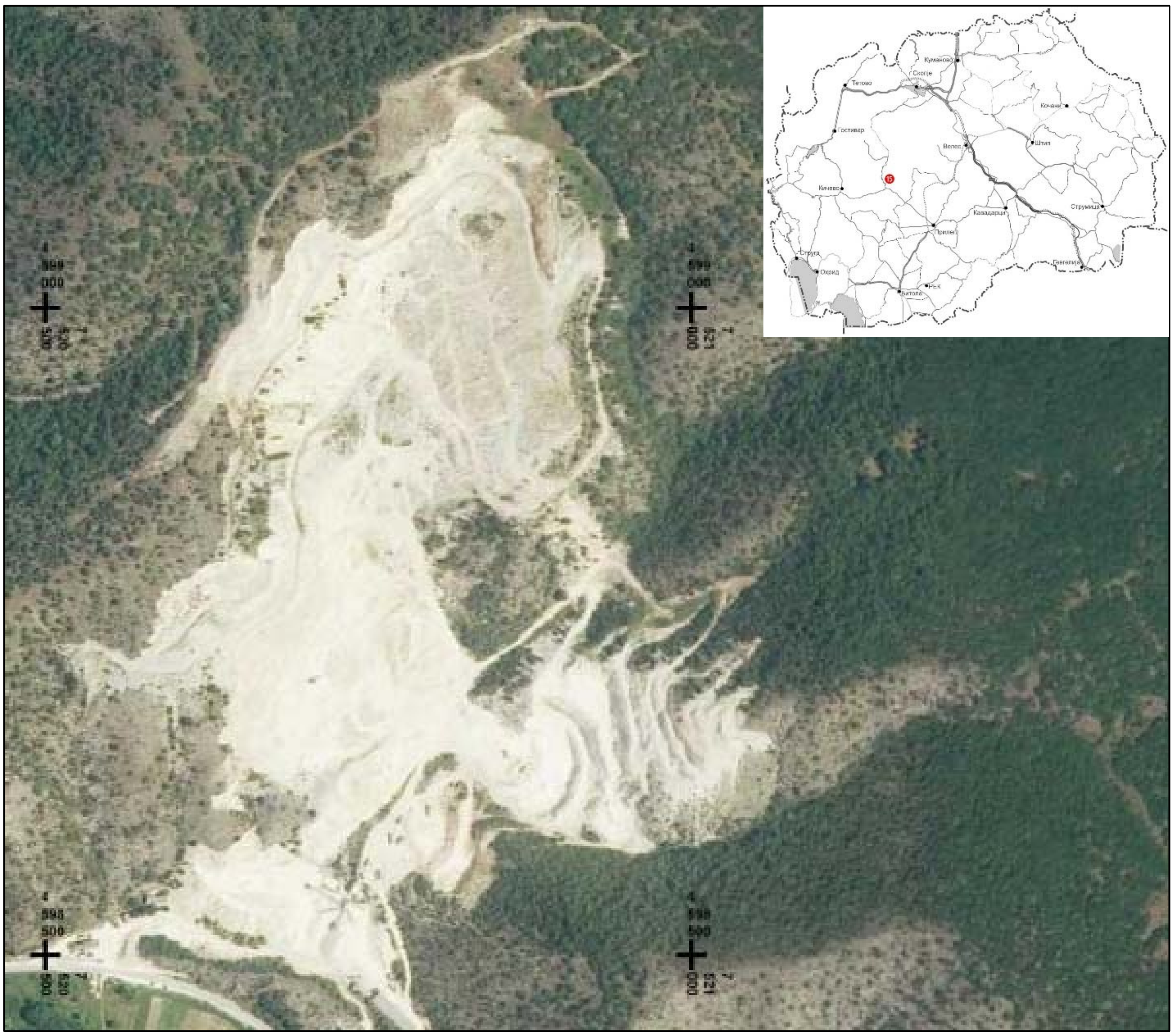
Површински коп „с. Драгов Дол” налази се у западној Македонији у непосредној близини села Драгов Дол, а административно припада општини Македонски Брод. Од Скопља је удаљен 151 km, а од Кичева 41 km. Комуникацијска мрежа је добра, а до каменолома се долази поред асфалтираног пута. Садржај $CaCO_3$ је 62,90 %. Годишње се производи 80.000 t кречњака, а максимални годишњи капацитет је 120.000 t.



*Слика 4.15 Локација површинског копа „с. Драгов Дол“, АКН 2019.*

## R15 - Површински коп „Долги Рид" – о. Македонски Брод

Површински коп „Долги Рид" налази се у западној Македонији у непосредној близини села Суводл, а административно припада општини Македонски Брод. Од Скопља је удаљен 140 km, од Кичева 31 km, а од Прилепа 36 km. Комуникацијска мрежа је добра, а до каменолома се долази поред асфалтираног пута. Садржај $CaCO_3$ је 59,50 %. Годишње се производи 75.000 t кречњака, а максимални годишњи капацитет је 200.000 t.




*Слика 4.16 Локација површинског копа „Долги Рид", АКН 2019.*

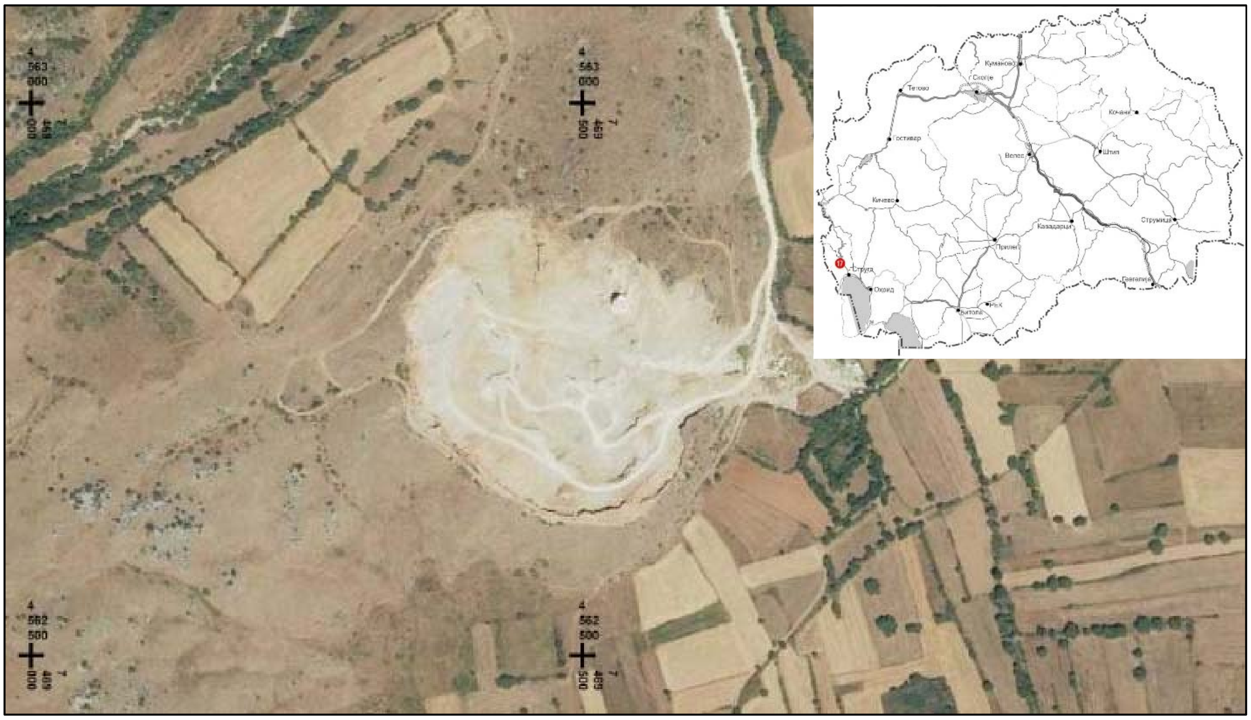
### R16 - Површински коп „Рашанец“ – о. Охрид

Површински коп „Рашанец” налази се у југозападној Македонији у близини села Завој, а административно припада општини Охрид. Од Скопља је удаљен 178 km, а од Охрида 16 km. Комуникацијска мрежа је добра, а до каменолома се долази поред асфалтираног пута. Садржај $CaCO_3$ је 92,50 %. Годишње се производи 60.000 t кречњака, а максимални годишњи капацитет је 75.000 t.

*Слика 4.17 Локација површинског копа „Рашанец“, АКН 2019.*

## R17 - Површински коп „Белица“ – о. Струга

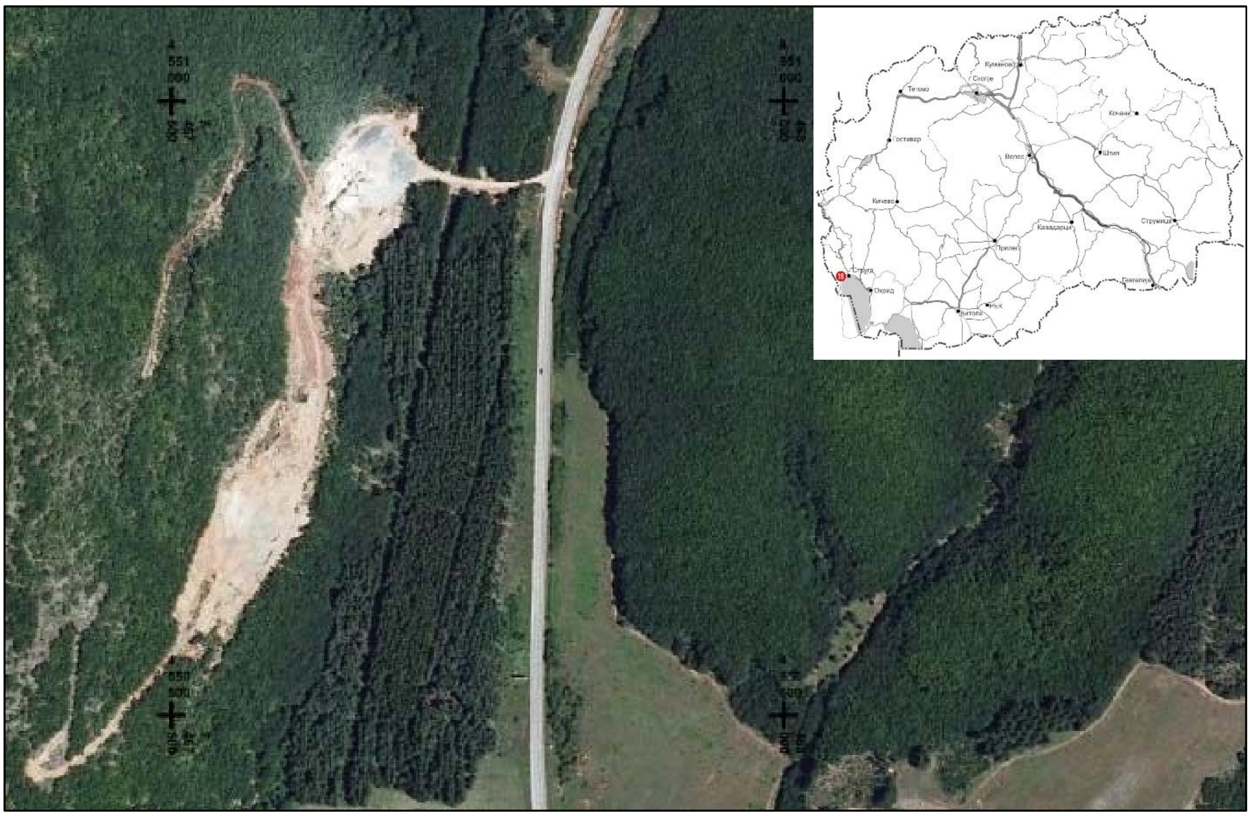
Површински коп „Белица” налази се у западној Македонији у близини села Долна Белица, а административно припада општини Струга. Од Скопља је удаљен 177 km, од Струге 7, а од Охрида 20 km. Комуникацијска мрежа је добра, а до каменолома се долази поред асфалтираног пута. Садржај $CaCO_3$ је 96,20 %. Годишње се производи 150.000 t кречњака, а максимални годишњи капацитет је 250.000 t.



*Слика 4.18 Локација површинског копа „Белица“, АКН 2019.*

**R18 - Површински коп „Локов – с. Франгово“ – о. Струга**

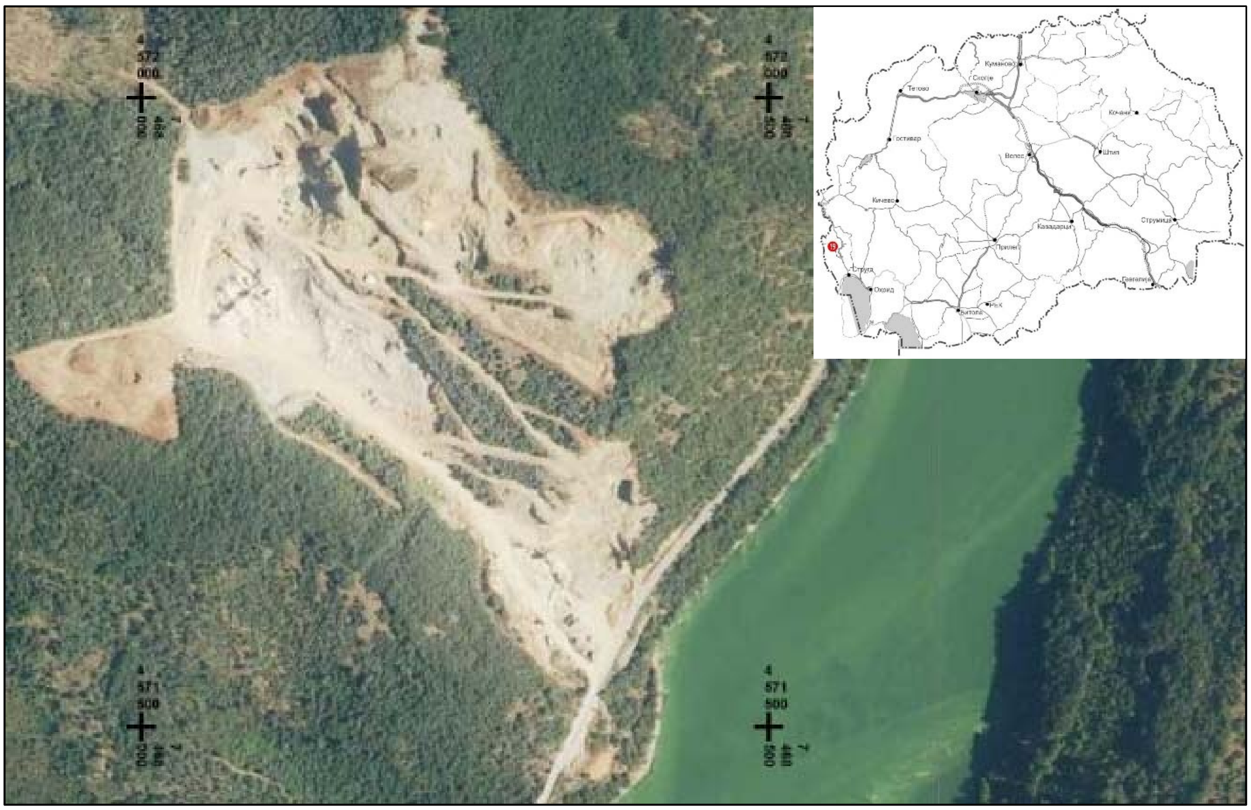
Површински коп „Локов – с. Франгово” налази се у југозападној Македонији у близини села Радожда, а административно припада општини Струга. Од Скопља је удаљен 188 km, од Струге 8, а од Охрида 21 km. Комуникацијска мрежа је добра, а до каменолома се долази поред асфалтираног пута. Садржај $CaCO_3$ је 97,93 %. Годишње се производи 80.000 t кречњака, а максимални годишњи капацитет је 150.000 t.



*Слика 4.19 Локација површинског копа „Локов – с. Франгово“, АКН 2019.*

**R19 - Површински коп „Краста - с. Бороец“ – о. Струга**

Површински коп „Краста - с. Бороец” налази се у западној Македонији у близини села Бороец, а административно припада општини Струга. Од Скопља је удаљен 185 km, од Струге 15, а од Охрида 28 km. Комуникацијска мрежа је добра, а до каменолома се долази поред асфалтираног пута. Садржај $CaCO_3$ је 96,20 %. Годишње се производи 85.000 t кречњака, а максимални годишњи капацитет је 150.000 t.



*Слика 4.20 Локација површинског копа „Краста – с. Бороец“, АКН 2019.*

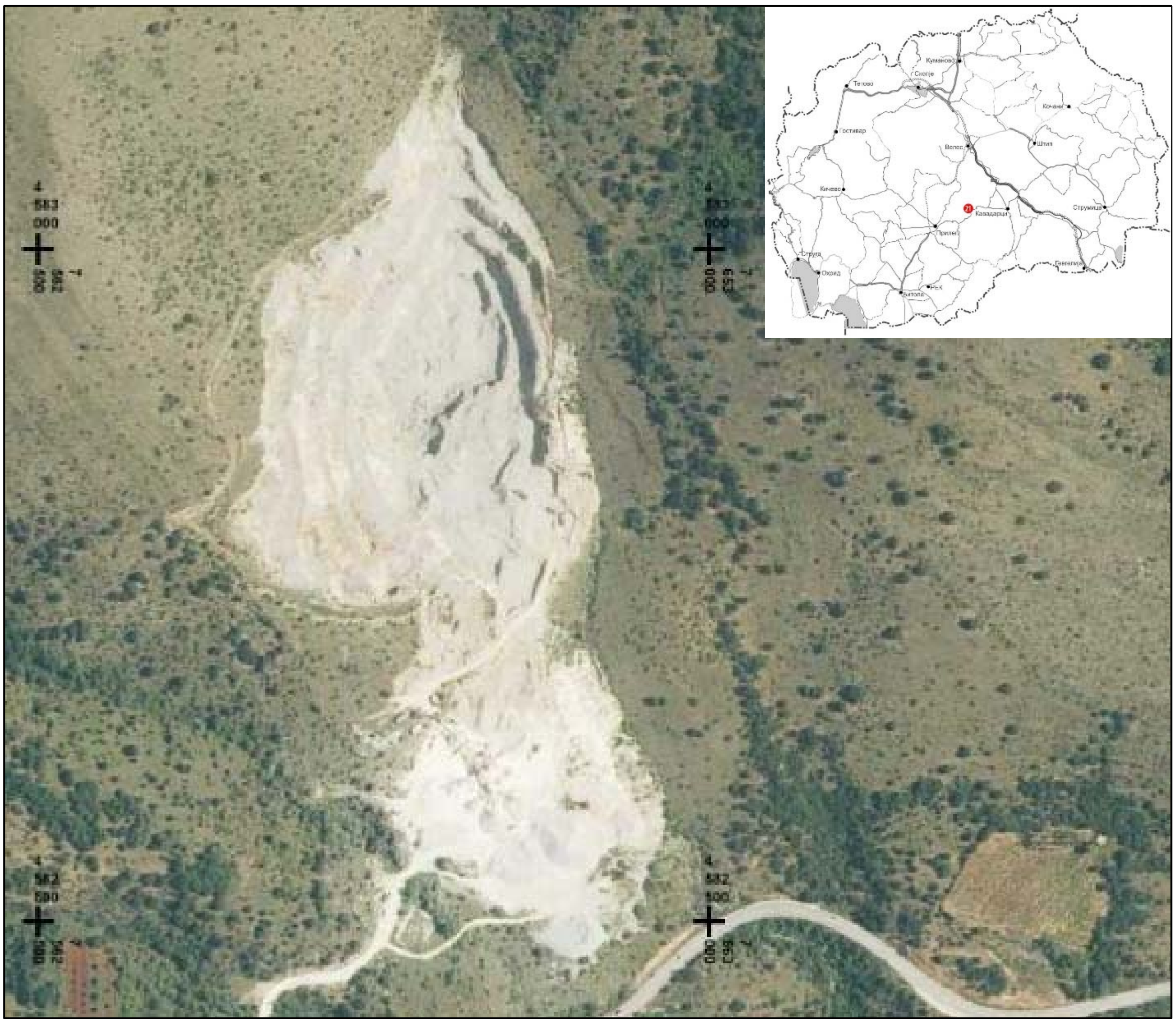
**R20 - Површински коп „Краста – с. Лабуништа“ – о. Струга**

Површински коп „ Краста – с. Лабуништа” налази се у западној Македонији у близини села Лабуништа, а административно припада општини Струга. Од Скопља је удаљен 183 km, од Струге 13, а од Охрида 26 km. Комуникацијска мрежа је добра, а до каменолома се долази поред асфалтираног пута. Садржај $CaCO_3$ је 96,20 %. Годишње се производи 75.000 t кречњака, а максимални годишњи капацитет је 200.000 t.

*Слика 4.21 Локација површинског копа „Краста – с. Лабуништа“, АКН 2019.*

**R21 - Површински коп „Тројаци“ – о. Прилеп**

Површински коп „Тројаци” налази се у јужној Македонији у близини села Тројаци, а административно припада општини Прилеп. Од Скопља је удаљен 109 km, а од Прилепа 26 km. Комуникацијска мрежа је повољна јер се налази поред магистралног пута. Садржај $CaCO_3$ је 61,22 %. Годишње се производи 70.000 t кречњака, а максимални годишњи капацитет је 300.000 t.



*Слика 4.22 Локација површинског копа „Тројаци“, АКН 2019.*

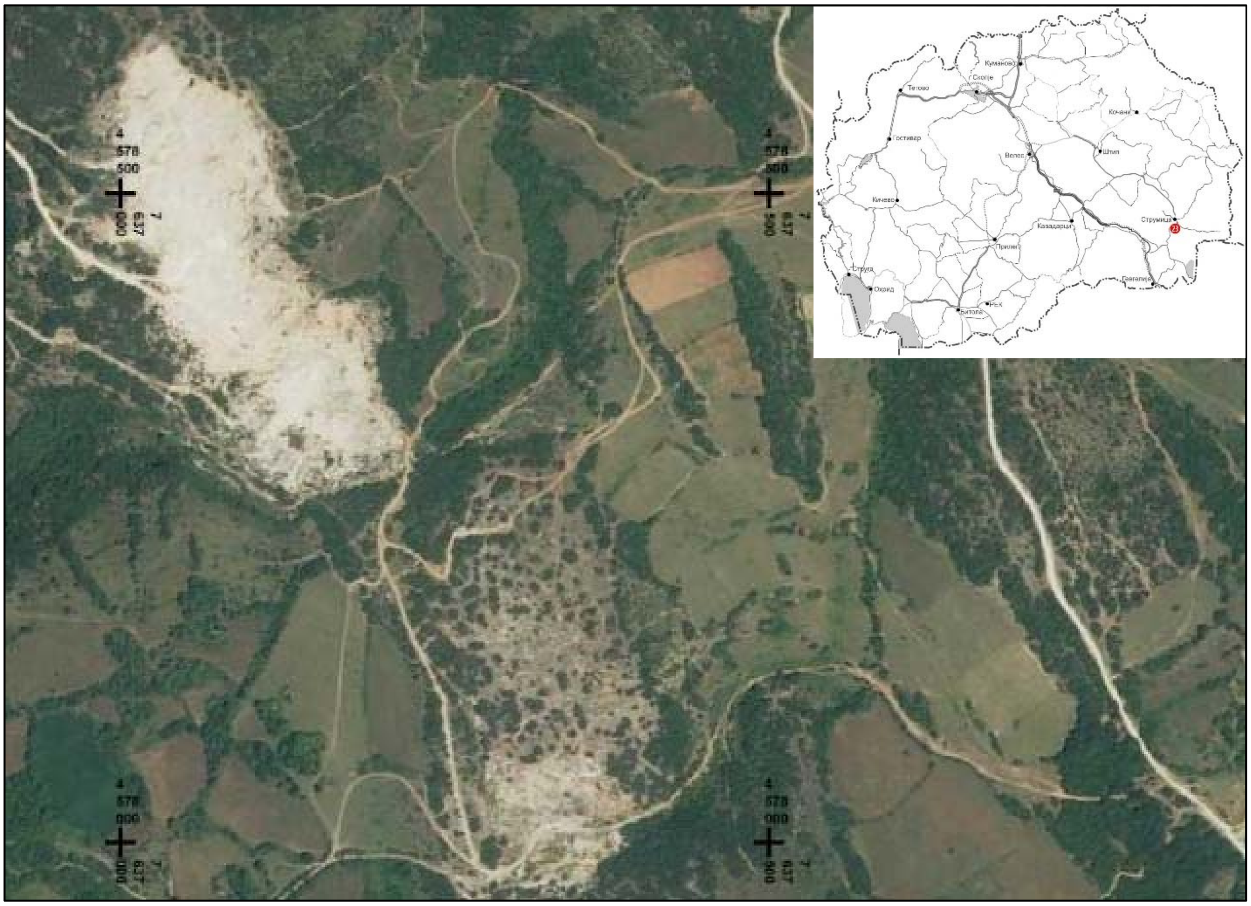
### R22 - Површински коп „Камен Дол“ – о. Росоман

Површински коп „Камен Дол” налази се у јужној Македонији у близини села Камен Дол, а административно припада општини Росоман. Од Скопља је удаљен 87 km, а од Кавадарца 16 km. Комуникацијска мрежа је добра, а до каменолома се долази поред асфалтираног пута у близини магистралног пута. Садржај $CaCO_3$ је 78,42 %. Годишње се производи 100.000 t кречњака, а максимални годишњи капацитет је 300.000 t.

*Слика 4.23 Локација површинског копа „Камен Дол“, АКН 2019.*

**R23- Површински коп „Мемешли“ – о. Струмица**

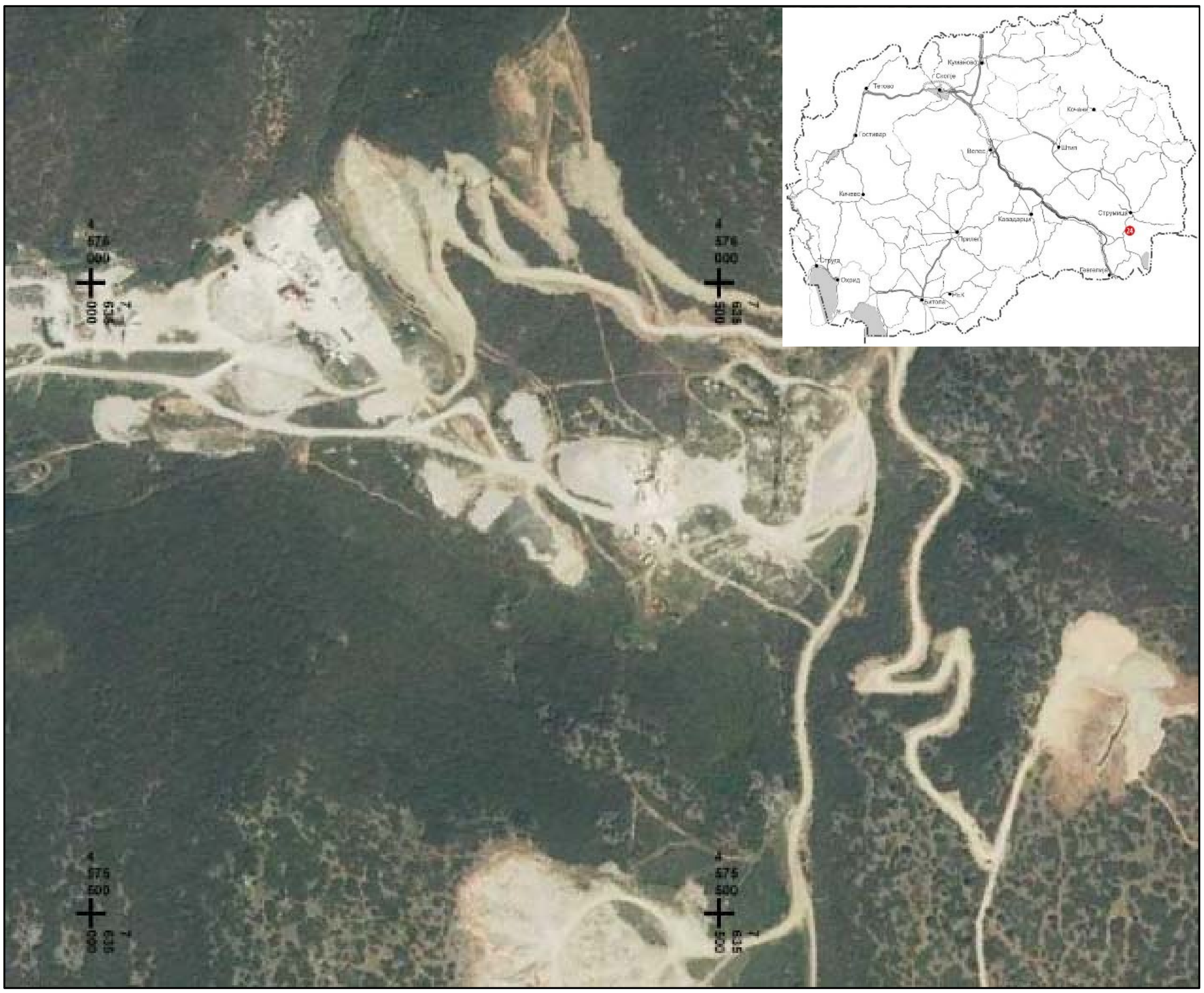
Површински коп „Мемешли” налази се у југоисточној Македонији у близини села Мемешли, а административно припада општини Струмица. Од Скопља је удаљен 154 km, а од Струмице 16 km. Комуникацијска мрежа је повољна јер се налази поред магистралног пута. Садржај $CaCO_3$ је 98,50 %. Годишње се производи 200.000 t кречњака, а максимални годишњи капацитет је 400.000 t.



*Слика 4.24 Локација површинског копа „Мемешли“, АКН 2019.*

**R24- Површински коп „Татарли Чука“ – о. Валандово**

Површински коп „ Татарли Чука” налази се у југоисточној Македонији у близини села Татарли, а административно припада општини Валандово. Од Скопља је удаљен 145 km, од Струмице 22 km, а од Ђевђелије 30 km. Комуникацијска мрежа је повољна јер се налази у близини магистралног пута. Садржај $CaCO_3$ је 97,98 %. Годишње се производи 100.000 t кречњака, а максимални годишњи капацитет је 200.000 t.




*Слика 4.25 Локација површинског копа „Татарли Чука“, АКН 2019.*

## R25 - Површински коп „Татарли Чука 2“ – о. Валандово

Површински коп „Татарли Чука 2” налази се у југоисточној Македонији у близини села Татарли, а административно припада општини Валандово. Од Скопља је удаљен 145 km, од Струмице 22 km, а од Ђевђелије 30 km. Комуникацијска мрежа је повољна јер се налази у близини магистралног пута. Садржај $CaCO_3$ је 97,80 %. Годишње се производи 50.000 t кречњака, а максимални годишњи капацитет је 200.000 t.


*Слика 4.26 Локација површинског копа „Татарли Чука 2“, АКН 2019.*

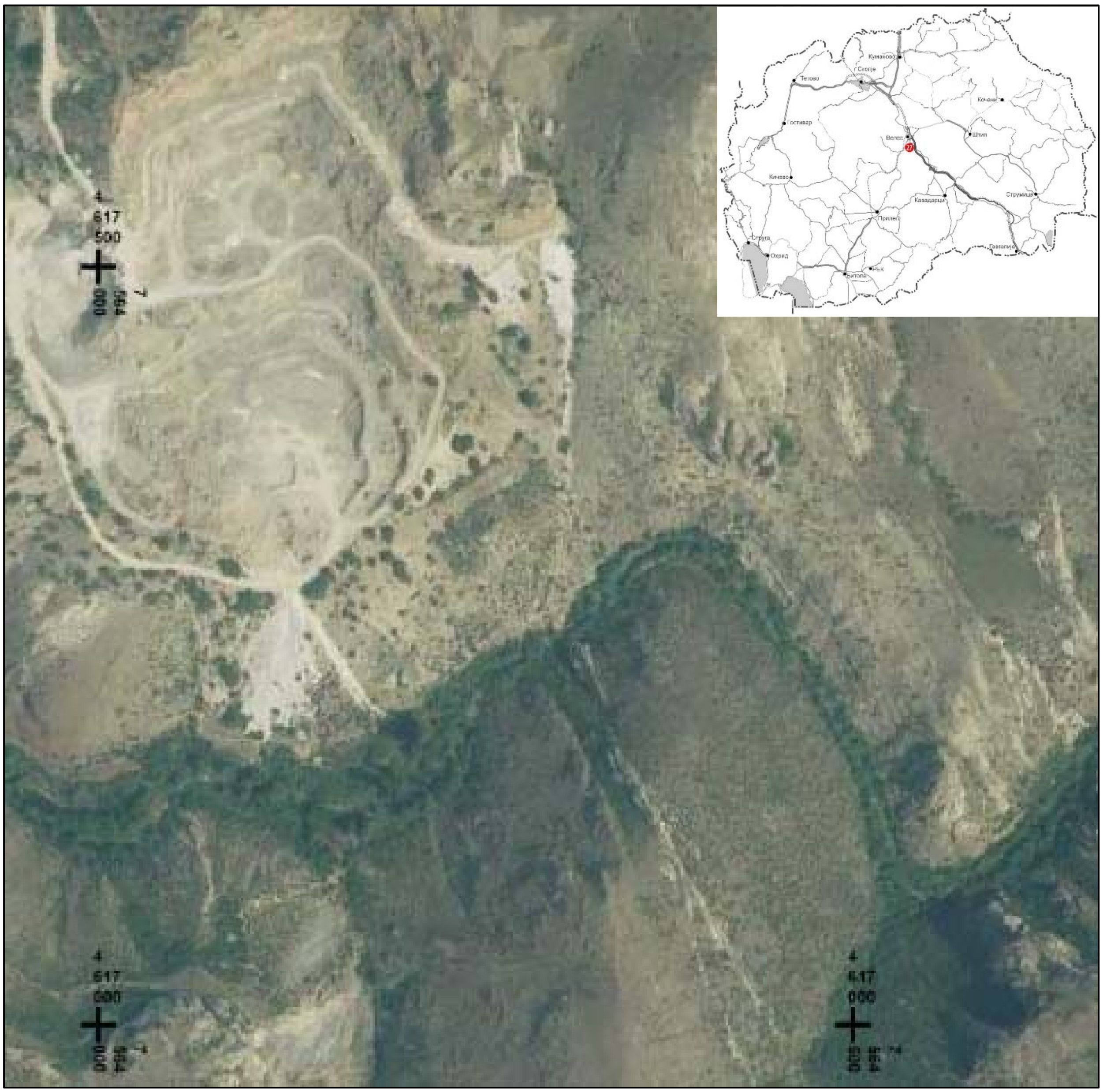
## R26 - Површински коп „Гроот“ – о. Велес

Површински коп „Гроот” налази се у централном делу Македонији у близини Велеса, а административно припада општини Велес. Од Скопља је удаљен 57 km, а од Велеса 4 km. Комуникацијска мрежа је повољна јер се налази у близини аутопута и железничку станицу. Садржај $CaCO_3$ је 94,20 %. Годишње се производи 200.000 t кречњака, а максимални годишњи капацитет је 400.000 t.


*Слика 4.27 Локација површинског копа „Гроот“, АКН 2019.*

## R27 - Површински коп „Тодорови Бавчи“ – о. Велес

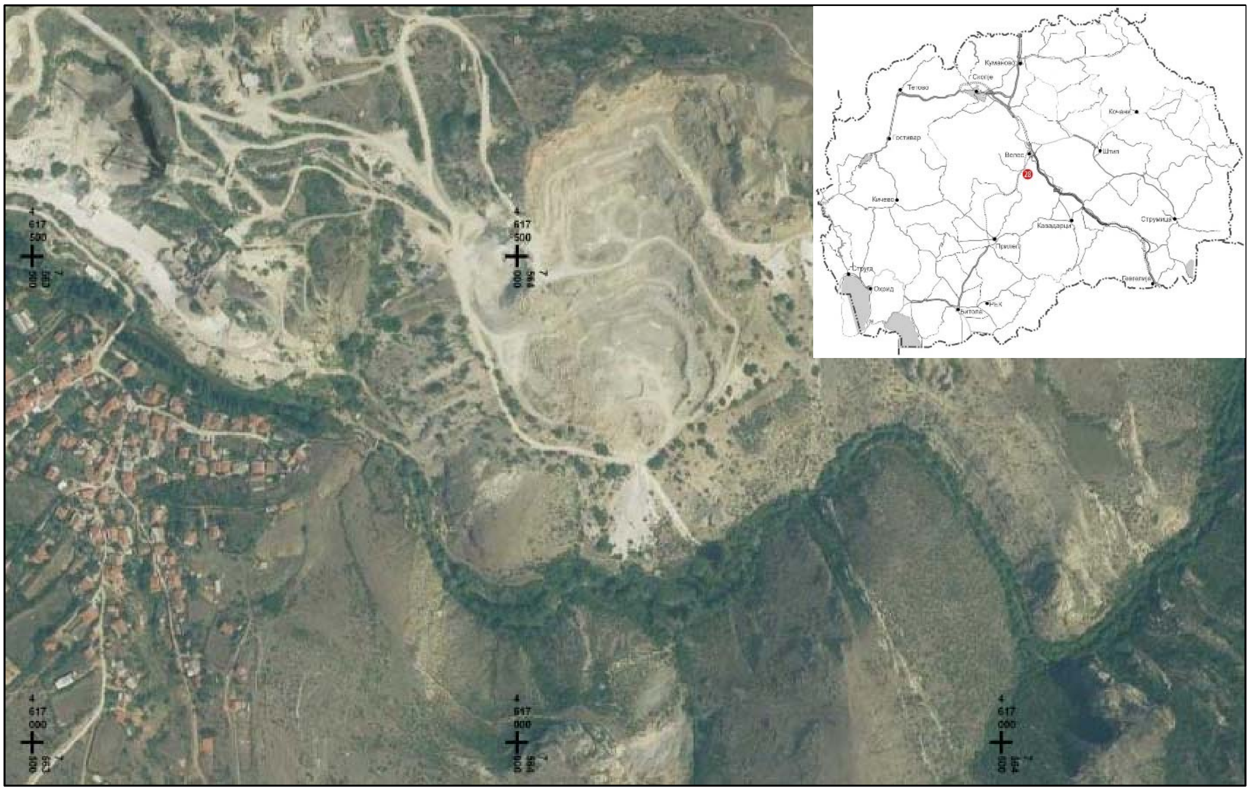
Површински коп „Тодорови Бавчи” налази се у централном делу Македонији у близини Велеса у склопу површинског копа „Превалец 1“, а административно припада општини Велес. Од Скопља је удаљен 57 km, а од Велеса 3 km. Комуникацијска мрежа је повољна јер се налази у близини аутопута и железничку станицу. Садржај $CaCO_3$ је 95,74 %. Годишње се производи 50.000 t кречњака, а максимални годишњи капацитет је 300.000 t.



*Слика 4.28 Локација површинског копа „Тодорови Бавчи“, АКН 2019.*

## R28 - Површински коп „Превалец 1“ – о. Велес

Површински коп „Превалец 1” налази се у централном делу Македонији у близини Велеса, а административно припада општини Велес. Од Скопља је удаљен 57 km, а од Велеса 3 km. Комуникацијска мрежа је повољна јер се налази у близини аутопута и железничку станицу. Садржај $CaCO_3$ је 96,84 %. Годишње се производи 75.000 t кречњака, а максимални годишњи капацитет је 300.000 t.



*Слика 4.29 Локација површинског копа „Превалец 1“, АКН 2019.*

## R29 - Површински коп „с. Видовиште“ – о. Кочани

Површински коп „с. Видовиште” налази се у источној Македонији у близини села Видовиште, а административно припада општина Кочани. Од Скопља је удаљен 113 km, од Кочана 13 km, а од Штипа 31 km. Комуникацијска мрежа је добра јер се налази у близини магистралног пута. Садржај $CaCO_3$ је 92,10 %. Годишње се производи 50.000 t кречњака, а максимални годишњи капацитет је 80.000 t.

*Слика 4.30 Локација површинског копа „с. Видовиште“, АКН 2019.*

### 4.3 ФОРМАЛНИ МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛ

Начелно формирање локацијских модела, за случајеве као што је експлоатација и потрошња кречњака, своди се на анализу и прилагођавање постојећих и увођење нових претпоставки на којима се модел заснива. У математичкој структури оваквих модела две су компоненте: функција критеријума и систем ограничења – математичке релације које локацијски проблем дефинишу у простору и времену [68,84].

При математичком опису проблема, пажња је на особеностима и захтевима који су од највећег значаја за сагледавање и решење проблема, у предметном проблему уочљива је:

- Функционална зависност две групе ентитета – производних и потрошачких;
- Релативно равномерна просторна распоређеност ентитета обе групе;
- Комуникациона повезаност свих ентитета.

Уочљиво је и да је проблем локацијски, оптимизациони, са ограничењима у којима фигуришу производни капацитети површинских копова кречњака, потребе потрошача, трошкови производње и превоза кречњака. Функција критеријума као квантитативни исказ критеријум оптималности, у овом случају може бити минимална удаљеност, минимални трошкови превоза, минимално трајање превоза, минимални трошкови производње и превоза итд. Пошто је макроекономски интерес земље успостављање рационалне структуре ентитета производње и потрошње кречњака, односно минимизација укупних трошкова система, логично је да су за критеријум оптималности мериторни минимални локацијски трошкови, односно трошкови производње и превоза кречњака.

Листа метода операционих истраживања, нуди више математичко-моделских приступа погодних за развој модела оптимизације експлоатације и потрошње кречњака. Полазећи од принципа да модел треба да обухвати само феномен од интереса са јасно дефинисаном функцијом, и да због вредновања није пожељан сувише сложен модел [49,62], за развој модела предметног проблема изабрана је проверена математичко-моделска основа линеарног програмирања.

У структури линеарног математичког модела је трошковна (минимизирајућа) функција, услови потрошње – потребе потрошача морају бити задовољене, и ограничења производње – производни капацитети површинских копова не могу бити прекорачени. У наставку су приказани модели за обе опције, прву са 15, и другу са 16 ентитета потрошње:

| 1. ОПЦИЈА | 2. ОПЦИЈА | |
|---|---|---|
| Функција циља | | |
| $z_1 = \sum_{i=1}^{29}\sum_{j=1}^{15}(d_i + c_{ij}x_{ij}) \rightarrow min$ | $z_1 = \sum_{i=1}^{29}\sum_{j=1}^{16}(d_i + c_{ij}x_{ij}) \rightarrow min$ | (1) |
| Услови<br>Производне могућности површинских копова | | |
| $\sum_{j=1}^{15} x_{ij} \leq R_i;\ i = \overline{1,29}$ | $\sum_{j=1}^{16} x_{ij} \leq R_i;\ i = \overline{1,29}$ | (2) |
| Потрошња-потребе потрошача | | |
| $\sum_{i=1}^{29} x_{ij} = P_j;\ j = \overline{1,15}$ | $\sum_{i=1}^{29} x_{ij} = P_j;\ j = \overline{1,16}$ | (3) |

где је:

$x_{ij}$ – Испоручена количина кречњака са површинског копа ($i$) потрошачу ($j$), у тонама.
$d_i$ – Трошкови производње по тони кречњака на површинском копу ($i$), у н.ј..
$c_{ij}$ – Трошкови превоза по тони кречњака од површинског копа ($i$) до потрошача ($j$), у н.ј..
$R_i$ – Производна могућност – годишњи капацитет површинског копа ($i$), у тонама.
$P_j$ – годишње потребе потрошача ($j$), у тонама.

Формални математички модели приказују се и у матричном – табеларном облику као манипулативно погоднијем [49,68]. Локацијски модел експлоатације и потрошње кречњака у Македонији у матричном облику приказан је у табели 4.1.

Табела 4.1, Матрични локацијски модел експлоатације и потрошње кречњака

| Површински коп | Потрошач | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | ... | $P_{15}$ | [$P_{16}$] |
| $R_1$ | $(d_1+c_{1,1})\cdot x_{1,1}$ | $(d_1+c_{1,2})\cdot x_{1,2}$ | $(d_1+c_{1,3})\cdot x_{1,3}$ | ... | $(d_1+c_{1,15})\cdot x_{1,15}$ | $(d_1+c_{1,16})\cdot x_{1,16}$ |
| $R_2$ | $(d_2+c_{2,1})\cdot x_{2,1}$ | $(d_2+c_{2,2})\cdot x_{2,2}$ | $(d_2+c_{2,3})\cdot x_{2,3}$ | ... | $(d_2+c_{2,15})\cdot x_{2,15}$ | $(d_2+c_{2,16})\cdot x_{2,16}$ |
| $R_3$ | $(d_3+c_{3,1})\cdot x_{3,1}$ | $(d_3+c_{3,2})\cdot x_{3,2}$ | $(d_3+c_{3,3})\cdot x_{3,3}$ | ... | $(d_3+c_{3,15})\cdot x_{3,15}$ | $(d_3+c_{3,16})\cdot x_{3,16}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $R_{28}$ | $(d_{28}+c_{28,1})\cdot x_{28,1}$ | $(d_{28}+c_{28,2}\cdot x_{28,2}$ | $(d_{28}+c_{28,3})\cdot x_{28,3}$ | ... | $(d_{28}+c_{28,15})\cdot x_{28,15}$ | $(d_{28}+c_{28,16})\cdot x_{28,16}$ |
| $R_{29}$ | $(d_{29}+c_{29,1})\cdot x_{29,1}$ | $(d_{29}+c_{29,2})\cdot x_{29,2}$ | $(d_{29}+c_{29,3})\cdot x_{29,3}$ | ... | $(d_{29}+c_{29,15})\cdot x_{29,15}$ | $(d_{29}+c_{29,16})\cdot x_{29,16}$ |

## 4.4 НУМЕРИЧКИ ЛОКАЦИЈСКИ МОДЕЛ И РЕЗУЛТАТИ ОПТИМИЗАЦИЈЕ

Нумерички локацијски модел експлоатације и потрошње кречњака у Македонији, табела 4.2 (стр. 107), заснован је на правилима формалног модела а конституисан на подацима о капацитетима 29 површинских копова, потребама за кречњаком 15 потрошача (опција 1), односно за 16 потрошача (опција 2), и израчунатих локацијских трошкова. Локацијски трошкови су збир трошкова производње и превоза тоне кречњака за најкраћи пут (најкраће растојање) између површинских копова и потрошача.

За решавање модела коришћен је GLPK (*GNU Linear Programming Kit*)[1] који представља скуп рутина написаних у програмском језику ANSI C и организованих у облику библиотеке која се може позвати. GLPK је намењен за решавање проблема линеарног програмирања, проблема мешовитог целобројног програмирања и других сродних проблема.

Модел претходно описаног локацијског проблема експлоатације и потрошње кречњака, написан је у моделујућем језику GMPL (*GNU MathProg modeling language*) и решен помоћу самосталног ЛП солвера glpsol који се позва из командне линије програма.

[1] Makhorin, A., GNU Linear Programming Kit: Reference Manual for GLPK Version 4.45 (Draft, December 2010). Free Software Foundation, Inc., 51 Franklin St, Fifth Floor, Boston, MA 02110-1301, USA, 2010.

Обрада модела написан у GNU MathPro укључује следеће кораке које треба изводити следећим редоследом (представљено у изворном облику):

1. **Allocating the workspace.** The translator allocates the workspace, an internal data structure used on all subsequent steps.
2. **Reading model section.** The translator reads model section and, optionally, data section from a specified text file and translates them into the internal code. If necessary, on this step data section may be ignored.
3. **Reading data section(s).** The translator reads one or more data sections from specified text file(s) and translates them into the internal code.
4. **Generating the model.** The translator executes the internal code to evaluate the content of the model objects such as sets, parameters, variables, constraints, and objectives. On this step the execution is suspended at the solve statement.
5. **Building the problem object.** The translator obtains all necessary information from the workspace and builds the standard problem object (that is, the program object of type glp_prob).
6. **Solving the problem.** On this step the problem object built on the previous step is passed to a solver, which solves the problem instance and stores its solution back to the problem object.
7. **Postsolving the model.** The translator copies the solution from the problem object to the workspace and then executes the internal code from the solve statement to the end of the model. (If model has no solve statement, the translator does nothing on this step.)
8. **Freeing the workspace.** The translator frees all the memory allocated to the workspace.

Модел записан у GMPL-у:

```
param n;        # broj ishodista
param m;        # broj odredista
set I := 1..n;  #
set O := 1..m;  #
param c{I,O};   # jedinicni troskovi
param a{I};     # ponuda
param b{O};     # traznja
```

```
var x{I,O}, >=0;
minimize stanje: sum{i in I, j in O} (c[i,j] * x[i,j]);
s.t.
   ponuda  {i in I}: sum {j in O} x[i,j]<=a[i];
   traznja {j in O}: sum {i in I} x[i,j]=b[j];
solve;
end;
```

Улазни параметри модела (подаци о понудама, тражњи и јединичним трошковима) за опцију 1 и опцију 2, налазили су се у посебном документу у txt формату.

Резултати анализе за опцију 1 приказани су у табели 4.3 (стр. 107), а за опцију 2 у табели 4.4 (стр. 108). Оптимални план експлоатације и потрошње кречњака за опцију 1, предвиђа следеће односе производње и потрошње:

| **Површински коп капацитета** (t/год) | | **Потрошач, прима** (t/год) |
|---|---|---|
| $R_1$ (100.000) | → | $P_1$ (100.000) |
| $R_2$ (200.000) | → | $P_1$ (200.000) |
| $R_3$ (450.000) | → | $P_1$ (450.000) |
| $R_4$ (150.000) | → | $P_1$ (150.000) |
| $R_5$ (50.000) | → | $P_1$ (50.000) |
| $R_6$ (100.000) | → | $P_2$ (25.000) |
| $R_7$ (150.000) | → | $P_2$ (150.000) |
| $R_8$ (100.000) | → | $P_{14}$ (100.000) |
| $R_9$ (150.000) | → | $P_{14}$ (50.000) |
| | → | $P_{15}$ (100.000) |
| $R_{10}$ (200.000) | → | $P_{13}$ (40.000) |
| | → | $P_{14}$ (70.000) |
| $R_{11}$ (150.000) | → | $P_{15}$ (150.000) |
| $R_{12}$ (115.000) | → | $P_9$(115.000) |
| $R_{13}$ (85.000) | → | $P_{10}$(85.000) |

| **Површински коп капацитета** (t/год) | | **Потрошач, прима** (t/год) |
|---|---|---|
| $R_{15}$ (75.000) | → | $P_9$ (45.000) |
| | → | $P_{13}$ (50.000) |
| $R_{16}$ (60.000) | → | $P_{10}$ (60.000) |
| $R_{17}$ (150.000) | → | $P_{11}$ (30.000) |
| | → | $P_{12}$ (120.000) |
| $R_{18}$ (80.000) | → | $P_{11}$ (70.000) |
| $R_{21}$ (70.000) | → | $P_9$ (15.000) |
| | → | $P_{10}$ (55.000) |
| $R_{22}$ (100.000) | → | $P_7$ (75.000) |
| $R_{23}$ (200.000) | → | $P_6$ (90.000) |
| $R_{25}$ (50.000) | → | $P_8$ (50.000) |
| $R_{26}$ (200.000) | → | $P_4$ (10.000) |
| | → | $P_5$ (100.000) |
| $R_{27}$ (50.000) | → | $P_3$ (45.000) |
| $R_{28}$ (75.000) | → | $P_3$ (75.000) |
| $R_{29}$ (50.000) | → | $P_4$ (50.000) |

Према плану опције 1, четири површинска копа $R_{14}$, $R_{19}$, $R_{20}$ и $R_{24}$, немају пласман и њихов рад би требало обуставити док се не стекну другачији услови, а површински копови $R_{6}$, $R_{10}$, $R_{18}$, $R_{22}$, $R_{23}$, $R_{26}$ и $R_{27}$ немају пуно искоришћење производних капацитета. Укупни минимални трошкови експлоатације и дистрибуције кречњака према плану опције 1 износе 1.286.995.000 н.ј., а специфични ≈ 467 н.ј. по тони кречњака.

Оптималан план експлоатације и потрошње кречњака за опцију 2 која у сценарију предвиђа укључивање Термоелектране Битољ као новог потрошача, предвиђа следећу интеракцију производње и потрошње:

| **Површински коп капацитета** (t/год) | | **Потрошач, прима** (t/год) |
|---|---|---|
| $R_{1}$ (100.000) | → | $P_{1}$ (100.000) |
| $R_{2}$ (200.000) | → | $P_{1}$ (200.000) |
| $R_{3}$ (450.000) | → | $P_{1}$ (450.000) |
| $R_{4}$ (150.000) | → | $P_{1}$ (150.000) |
| $R_{6}$ (100.000) | → | $P_{2}$ (25.000) |
| $R_{7}$ (200.000) | → | $P_{2}$ (150.000) |
| $R_{8}$ (100.000) | → | $P_{14}$ (100.000) |
| $R_{9}$ (150.000) | → | $P_{14}$ (50.000) |
| | → | $P_{15}$ (100.000) |
| $R_{10}$ (200.000) | → | $P_{13}$ (85.000) |
| | → | $P_{14}$ (70.000) |
| $R_{11}$ (150.000) | → | $P_{15}$ (150.000) |
| $R_{12}$ (115.000) | → | $P_{9}$ (5.000) |
| | → | $P_{16}$ (110.000) |
| $R_{13}$ (85.000) | → | $P_{16}$ (85.000) |
| $R_{14}$ (85.000) | → | $P_{9}$ (80.000) |
| $R_{15}$ (75.000) | → | $P_{9}$ (75.000) |

| **Површински коп капацитета** (t/год) | | **Потрошач, прима** (t/год) |
|---|---|---|
| $R_{16}$ (60.000) | → | $P_{10}$ (50.000) |
| | → | $P_{16}$ (10.000) |
| $R_{17}$ (150.000) | → | $P_{10}$ (150.000) |
| $R_{18}$ (80.000) | → | $P_{11}$ (80.000) |
| $R_{19}$ (70.000) | → | $P_{11}$ (20.000) |
| | → | $P_{12}$ (45.000) |
| $R_{20}$ (75.000) | → | $P_{12}$ (75.000) |
| $R_{21}$ (70.000) | → | $P_{16}$ (70.000) |
| $R_{22}$ (70.000) | → | $P_{7}$ (75.000) |
| | → | $P_{16}$ (25.000) |
| $R_{23}$ (200.000) | → | $P_{6}$ (90.000) |
| $R_{25}$ (50.000) | → | $P_{8}$ (45.000) |
| $R_{26}$ (200.000) | → | $P_{4}$ (10.000) |
| | → | $P_{5}$ (95.000) |
| $R_{27}$ (50.000) | → | $P_{3}$ (45.000) |
| | → | $P_{5}$ (5.000) |
| $R_{28}$ (75.000) | → | $P_{3}$ (75.000) |
| $R_{29}$ (50.000) | → | $P_{4}$ (50.000) |

Табела 4.2, Нумерички локацијски модел експлоатације и потрошње кречњака, опција 1 и 2

| **Површински коп** | **Капацитет** ($x10^3t$ /год) | П о т р о ш а ч | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ | $P_9$ | $P_{10}$ | $P_{11}$ | $P_{12}$ | $P_{13}$ | $P_{14}$ | $P_{15}$ | [$P_{16}$] |
| $R_1$ | 100 | 445 | 550 | 592 | 787 | 712 | 892 | 715 | 907 | 823 | 949 | 934 | 934 | 748 | 613 | 547 | 955 |
| $R_2$ | 200 | 463 | 559 | 601 | 796 | 721 | 907 | 730 | 922 | 838 | 964 | 949 | 949 | 763 | 628 | 562 | 970 |
| $R_3$ | 450 | 466 | 562 | 586 | 781 | 688 | 886 | 709 | 901 | 817 | 943 | 961 | 961 | 775 | 685 | 595 | 949 |
| $R_4$ | 150 | 469 | 565 | 589 | 784 | 691 | 889 | 712 | 904 | 820 | 946 | 964 | 964 | 778 | 688 | 598 | 952 |
| $R_5$ | 50 | 478 | 574 | 598 | 793 | 700 | 898 | 721 | 913 | 829 | 955 | 973 | 973 | 787 | 697 | 607 | 961 |
| $R_6$ | 100 | 562 | 445 | 622 | 724 | 652 | 832 | 745 | 937 | 853 | 979 | 1096 | 1096 | 910 | 778 | 709 | 985 |
| $R_7$ | 150 | 529 | 436 | 565 | 739 | 667 | 850 | 673 | 865 | 784 | 907 | 1042 | 1042 | 856 | 724 | 655 | 913 |
| $R_8$ | 100 | 616 | 760 | 802 | 997 | 922 | 1102 | 889 | 1117 | 748 | 784 | 733 | 733 | 547 | 421 | 499 | 790 |
| $R_9$ | 150 | 613 | 757 | 799 | 994 | 919 | 1099 | 922 | 1114 | 718 | 754 | 703 | 703 | 517 | 421 | 496 | 760 |
| $R_{10}$ | 200 | 622 | 763 | 808 | 1003 | 928 | 1108 | 931 | 1123 | 706 | 745 | 694 | 694 | 508 | 430 | 505 | 751 |
| $R_{11}$ | 150 | 490 | 634 | 676 | 871 | 796 | 979 | 799 | 991 | 841 | 877 | 826 | 826 | 640 | 508 | 439 | 883 |
| $R_{12}$ | 115 | 823 | 910 | 751 | 940 | 868 | 934 | 655 | 910 | 511 | 637 | 673 | 673 | 496 | 631 | 709 | 643 |
| $R_{13}$ | 85 | 844 | 958 | 799 | 991 | 916 | 982 | 703 | 958 | 556 | 532 | 670 | 670 | 514 | 652 | 727 | 538 |
| $R_{14}$ | 80 | 853 | 940 | 781 | 973 | 898 | 967 | 685 | 943 | 544 | 670 | 703 | 703 | 523 | 661 | 736 | 676 |
| $R_{15}$ | 75 | 820 | 907 | 748 | 937 | 865 | 931 | 652 | 907 | 508 | 634 | 670 | 670 | 493 | 628 | 706 | 640 |
| $R_{16}$ | 60 | 934 | 1084 | 922 | 1114 | 1039 | 1108 | 826 | 1084 | 688 | 565 | 448 | 493 | 604 | 742 | 817 | 571 |
| $R_{17}$ | 150 | 931 | 1075 | 1021 | 1213 | 1138 | 1207 | 925 | 1183 | 787 | 664 | 460 | 421 | 604 | 739 | 817 | 670 |
| $R_{18}$ | 80 | 964 | 1078 | 1024 | 1216 | 1141 | 1210 | 928 | 1186 | 790 | 667 | 463 | 424 | 607 | 742 | 820 | 673 |
| $R_{19}$ | 85 | 955 | 1054 | 1045 | 1237 | 1162 | 1231 | 949 | 1207 | 811 | 688 | 484 | 445 | 628 | 763 | 841 | 694 |
| $R_{20}$ | 75 | 949 | 1048 | 1039 | 1231 | 1156 | 1225 | 943 | 1201 | 805 | 682 | 478 | 439 | 622 | 757 | 835 | 688 |
| $R_{21}$ | 70 | 727 | 745 | 583 | 775 | 700 | 769 | 490 | 745 | 457 | 583 | 778 | 820 | 655 | 790 | 877 | 589 |
| $R_{22}$ | 100 | 661 | 679 | 520 | 709 | 637 | 703 | 448 | 679 | 529 | 655 | 850 | 892 | 727 | 877 | 811 | 661 |
| $R_{23}$ | 200 | 862 | 877 | 703 | 730 | 643 | 448 | 631 | 520 | 796 | 922 | 1120 | 1162 | 994 | 1078 | 1009 | 928 |
| $R_{24}$ | 100 | 835 | 850 | 691 | 748 | 661 | 466 | 574 | 490 | 769 | 895 | 1093 | 1135 | 967 | 1048 | 982 | 901 |
| $R_{25}$ | 50 | 835 | 850 | 691 | 748 | 661 | 466 | 574 | 490 | 769 | 895 | 1093 | 1135 | 967 | 1048 | 982 | 901 |
| $R_{26}$ | 200 | 571 | 589 | 412 | 619 | 538 | 724 | 559 | 751 | 667 | 793 | 991 | 1033 | 919 | 787 | 718 | 799 |
| $R_{27}$ | 50 | 571 | 589 | 409 | 619 | 538 | 724 | 559 | 751 | 667 | 793 | 991 | 1033 | 919 | 784 | 718 | 799 |
| $R_{28}$ | 75 | 571 | 589 | 409 | 619 | 538 | 724 | 559 | 751 | 667 | 793 | 991 | 1033 | 919 | 784 | 718 | 799 |
| $R_{29}$ | 50 | 739 | 670 | 601 | 439 | 493 | 679 | 670 | 829 | 826 | 952 | 1147 | 1192 | 1087 | 955 | 886 | 958 |
| Потрошња ($x10^3t$/год) | | 950 | 175 | 120 | 60 | 100 | 90 | 75 | 50 | 160 | 200 | 100 | 120 | 85 | 220 | 250 | 300 |
| Опција | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | 2 |

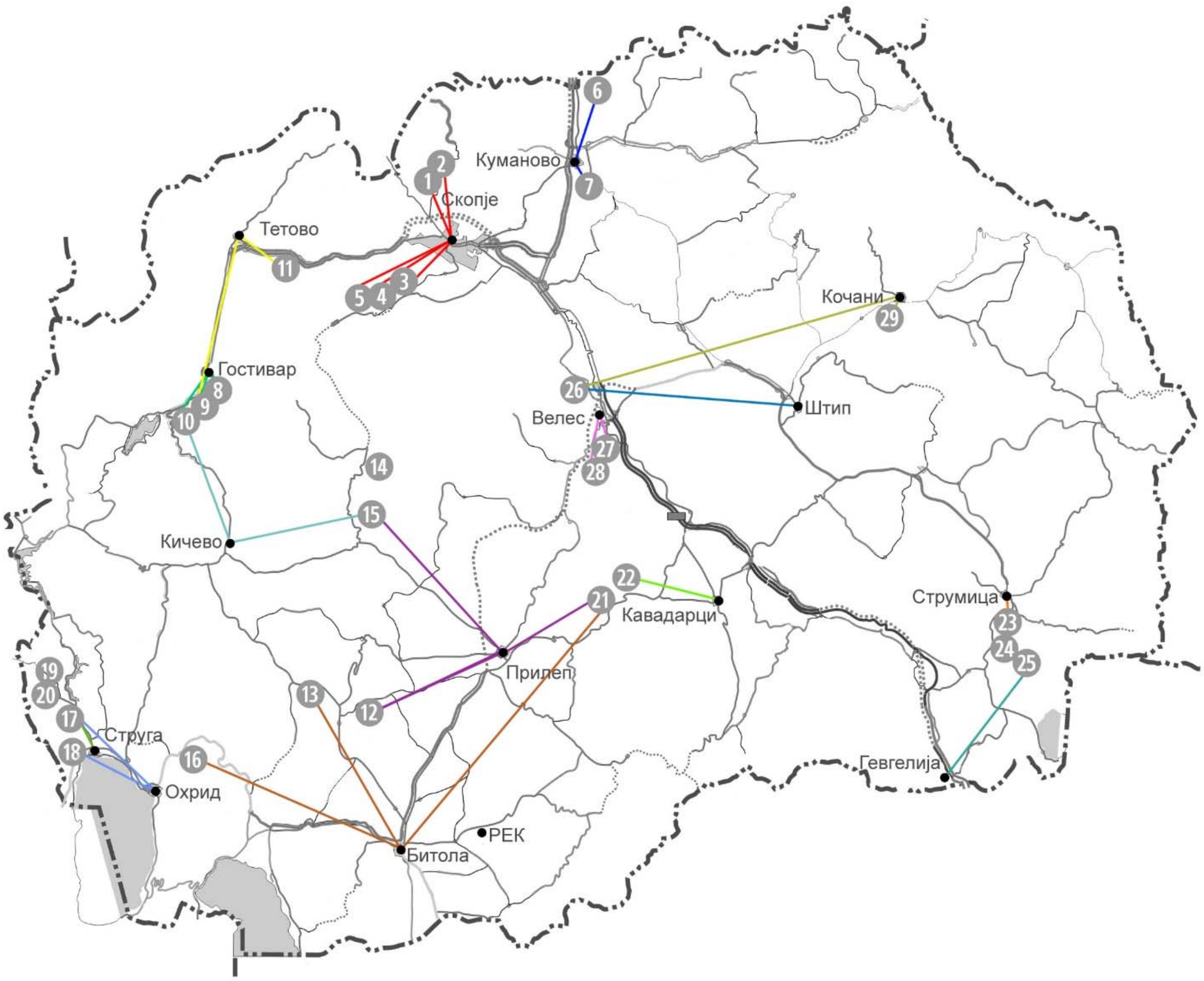
Табела 4.3, Оптималан план експлоатације и потрошње кречњака, опција 1

| Површински коп | Капацитет ($x10^3t$ /год) | П о т р о ш а ч | | | | | | | | | | | | | | | Вишак ($x10^3t$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ | $P_9$ | $P_{10}$ | $P_{11}$ | $P_{12}$ | $P_{13}$ | $P_{14}$ | $P_{15}$ | |
| $R_1$ | 100 | 100 | | | | | | | | | | | | | | | |
| $R_2$ | 200 | 200 | | | | | | | | | | | | | | | |
| $R_3$ | 450 | 450 | | | | | | | | | | | | | | | |
| $R_4$ | 150 | 150 | | | | | | | | | | | | | | | |
| $R_5$ | 50 | 50 | | | | | | | | | | | | | | | |
| $R_6$ | 100 | | 25 | | | | | | | | | | | | | | 75 |
| $R_7$ | 150 | | 150 | | | | | | | | | | | | | | |
| $R_8$ | 100 | | | | | | | | | | | | | | 100 | | |
| $R_9$ | 150 | | | | | | | | | | | | | | 50 | 100 | |
| $R_{10}$ | 200 | | | | | | | | | | | | | 40 | 70 | | 90 |
| $R_{11}$ | 150 | | | | | | | | | | | | | | | 150 | |
| $R_{12}$ | 115 | | | | | | | | | 115 | | | | | | | |
| $R_{13}$ | 85 | | | | | | | | | | 85 | | | | | | |
| $R_{14}$ | 80 | | | | | | | | | | | | | | | | 80 |
| $R_{15}$ | 75 | | | | | | | | | 30 | | | | 45 | | | |
| $R_{16}$ | 60 | | | | | | | | | | 60 | | | | | | |
| $R_{17}$ | 150 | | | | | | | | | | | 30 | 120 | | | | |
| $R_{18}$ | 80 | | | | | | | | | | | 70 | | | | | 10 |
| $R_{19}$ | 85 | | | | | | | | | | | | | | | | 85 |
| $R_{20}$ | 75 | | | | | | | | | | | | | | | | 75 |
| $R_{21}$ | 70 | | | | | | | | | 15 | 55 | | | | | | |
| $R_{22}$ | 100 | | | | | | | 75 | | | | | | | | | 25 |
| $R_{23}$ | 200 | | | | | | 90 | | | | | | | | | | 110 |
| $R_{24}$ | 100 | | | | | | | | | | | | | | | | 100 |
| $R_{25}$ | 50 | | | | | | | | 50 | | | | | | | | |
| $R_{26}$ | 200 | | | | 10 | 100 | | | | | | | | | | | 90 |
| $R_{27}$ | 50 | | | 45 | | | | | | | | | | | | | 5 |
| $R_{28}$ | 75 | | | 75 | | | | | | | | | | | | | |
| $R_{29}$ | 50 | | | | 50 | | | | | | | | | | | | |
| Потрошња ($x10^3t$/год) | | 950 | 175 | 120 | 60 | 100 | 90 | 75 | 50 | 160 | 200 | 100 | 120 | 85 | 220 | 250 | |
| Снабдевеност | | 100% | | | | | | | | | | | | | | | |

Табела 4.4, Оптималан план експлоатације и потрошње кречњака, опција 2

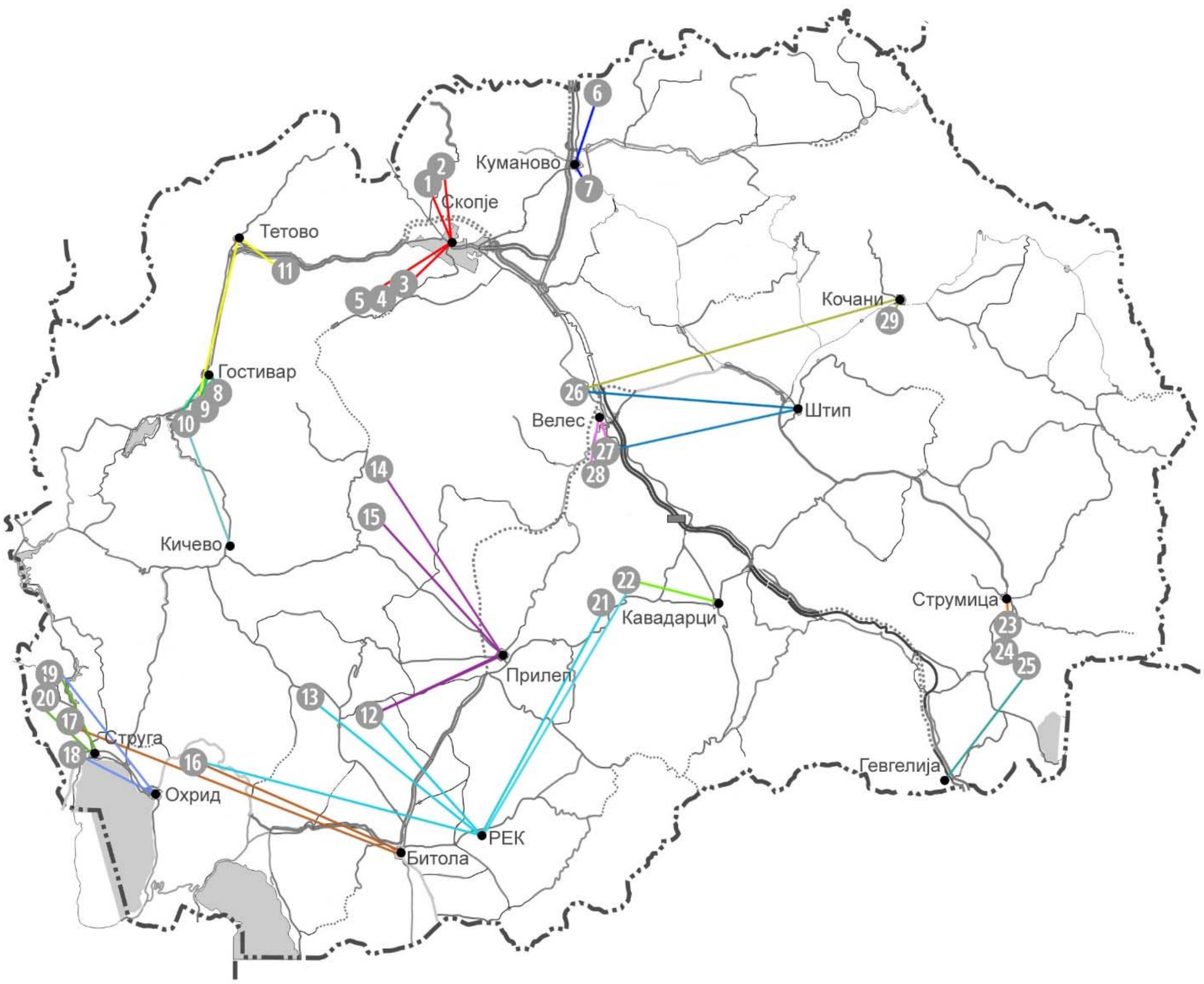
| Површински коп | Капацитет ($x10^3t$ /год) | П о т р о ш а ч | | | | | | | | | | | | | | | | Вишак ($x10^3t$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ | $P_9$ | $P_{10}$ | $P_{11}$ | $P_{12}$ | $P_{13}$ | $P_{14}$ | $P_{15}$ | $P_{16}$ | |
| $R_1$ | 100 | 100 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $R_2$ | 200 | 200 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $R_3$ | 450 | 450 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $R_4$ | 150 | 150 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $R_5$ | 50 | 50 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $R_6$ | 100 | | 25 | | | | | | | | | | | | | | | 75 |
| $R_7$ | 150 | | 150 | | | | | | | | | | | | | | | |
| $R_8$ | 100 | | | | | | | | | | | | | | 100 | | | |
| $R_9$ | 150 | | | | | | | | | | | | | | 50 | 100 | | |
| $R_{10}$ | 200 | | | | | | | | | | | | | 85 | 70 | | | 45 |
| $R_{11}$ | 150 | | | | | | | | | | | | | | | 150 | | |
| $R_{12}$ | 115 | | | | | | | | | 5 | | | | | | | 110 | |
| $R_{13}$ | 85 | | | | | | | | | | | | | | | | 85 | |
| $R_{14}$ | 80. | | | | | | | | | 80 | | | | | | | | |
| $R_{15}$ | 75 | | | | | | | | | 75 | | | | | | | | |
| $R_{16}$ | 60 | | | | | | | | | | | | | | | | 10 | |
| $R_{17}$ | 150 | | | | | | | | | | 150 | | | | | | | |
| $R_{18}$ | 80 | | | | | | | | | | | 80 | | | | | | |
| $R_{19}$ | 85 | | | | | | | | | | | 20 | 45 | | | | | 20 |
| $R_{20}$ | 75 | | | | | | | | | | | | 75 | | | | | |
| $R_{21}$ | 70 | | | | | | | | | | | | | | | | 70 | |
| $R_{22}$ | 100 | | | | | | | 75 | | | | | | | | | 25 | |
| $R_{23}$ | 200 | | | | | | 90 | | | | | | | | | | | 110 |
| $R_{24}$ | 100 | | | | | | | | | | | | | | | | | 100 |
| $R_{25}$ | 50 | | | | | | | | 50 | | | | | | | | | |
| $R_{26}$ | 200 | | | | 10 | 95 | | | | | | | | | | | | 95 |
| $R_{27}$ | 50 | | | 45 | | 5 | | | | | | | | | | | | |
| $R_{28}$ | 75 | | | 75 | | | | | | | | | | | | | | |
| $R_{29}$ | 50 | | | | 50 | | | | | | | | | | | | | |
| Потрошња ($x10^3t$/год) | | 950 | 175 | 120 | 60 | 100 | 90 | 75 | 50 | 160 | 200 | 100 | 120 | 85 | 220 | 250 | 300 | |
| Снабдевеност | | 100% | | | | | | | | | | | | | | | | |

На слици 4.31 приказана је транспортна шема према опцији 1, а на слици 4.32 транспортна шема према опцији 2.




*Слика 4.31, Транспортна шема, опција 1*

Према овом плану, само површински коп $R_{24}$ нема пласман и требало би да обустави рад, а површински копови $R_6$, $R_{10}$, $R_{19}$, $R_{23}$ и $R_{26}$ имају веће производне капацитете од планских испорука. Укупни трошкови експлоатације и дистрибуције кречњака према оптималном плану опције 2 износе 1.490.515.000 н.ј., а специфични ≈ 488 н.ј. по тони кречњака.




*Слика 4.32, Транспортна шема, опција 2*

Претпоставка о увођењу новог 16-тог потрошача у структуру система, доводи до прерасподела испорука кречњака и изражених разлика оптималних планова опције 1 и 2. Уместо четири, како је предвиђено планом опције 1, само један површински коп нема пласман у плану опције 2. Са неискоришћеним капацитетима у плану опције 2 мањи је и број површинских копова за два. Супротно овим трендовима, трошкови оптималног плана опције 2 већи су за 4,44% у односу на трошкове опције 1.

Ове разлике збуњују, али су објашњиве и логичне. Увођењем новог потрошача потрошња кречњака је повећана за 11% а производни капацитети су остали непромењени, што је смањило разлику између расположивих и потребних количина кречњака и у план опције 2 укључило три површинска копа који у плану опције 1 нису имали пласман. Испоруке кречњака са ова три површинска копа, трошковно неповољније категорисана и прерасподела испорука кречњака са других површинских копова, утицали су на мало повећање трошкова у оптималном плану опције 2.

Предвиђање последица промена у систему производње и потрошње, као што је систем експлоатације и потрошње кречњака у Македонији, је проблем који захтева одговарајући аналитички приступ који обухвата све ограничавајуће факторе, њихова деловања, зависности, пожељне и непожељне промене, и испуњење постављеног циља или циљева. Без формирања погодног апроксимативног математичког модела и примене одговарајуће методе за решавање, није могуће решење проблема оптималног нивоа. Модел омогућава потпуније и поузданије сагледавање деловања промена релевантних параметара на оптималан циљ, пружа могућност експериментисања мењањем основних претпоставки и усмеравајућег деловања на исход. Ове наводе илуструју и потврђују резултати истраживања.

# 5. ЗАКЉУЧАК

## 5.1 АНАЛИЗА И ОЦЕНА

Према утврђеном предмету, научним циљевима и истраживачком програму, ова дисертација је у целини реализована. Истраживања у оквиру докторске дисертације одвијала се у две синхронизоване фазе, прва фаза је обухватила сагледавање, отварање и детерминисање проблема, као и постављање алгоритма примене линеарних оптимизационих модела код подршке доношењу рударских одлука. У другој фази представљен је конкретан рударски проблем, са тест-експерименталним истраживањем које је обухватило процену ефеката и примену модела линеарне оптимизације у доношењу одлука. Обим и квалитет реализованих истраживања у дисертацији омогућавају поуздану анализу коначних резултата и објективну оцену оствареног, односно оцену примењивости линеарних модела у доношењу одлука у рударству.

Циљ ове докторске дисертације био је развој модела који ће допринети побољшању ефикасности одлучивања првенствено у рударству, употребом методе решавања проблема линеарног програмирања.

Експериментални део се односио на анализу лидера у производњи кречњака у Македонији, односно 29 површинских копова на којима се експлоатише кречњак са годишњим капацитетом већим од 50.000 тона. За потрошаче је узето 15 локација, односно већи градови и урбана подручја и 16-ти потенцијални потрошач, односно термоелектрана у Битољу. Током развоја модела узимани су у обзир годишња производња, удаљеност између рудника и потрошача и трошкови превоза.

Резултати модела у опцији 1 дали су укупне минималне трошкове за експлоатацију и дистрибуцију кречњака у износу од 1.286.995.000 н.ј., а специфичне на нивоу од ≈ 467 н.ј. по тони кречњака, уз потенцијални прекид рада 4 површинска копа и смањени производни капацитет за 7 каменолома.

У опцији 2, укупни минимални трошкови за експлоатацију и дистрибуцију кречњака су 1.490.515.000 н.ј, а специфични ≈ 488 н.ј. по тони кречњака, престанак рада на 1 површинском копу и 6 површинских копова који раде са смањеном производњом. Добијена разлика у цени је настала првенствено због неповољне расподеле површинских копова.

На овај начин, потврђена је општа хипотеза истраживања, у смислу унапређивања ефикасности процеса одлучивања у рударству и успостављања савременог управљачког радног оквира за одлучивање и вођење процеса производње у рудницима, као и у ширем пословно-технолошком систему.

Резултати тест-експерименталних истраживања у потпуности потврђују примену линеарне оптимизационе модела у доношењу одлука и потврђују почетну хипотезу дисертације о њеним широким могућностима за адекватан избор и правилан поступак у примени метода линеарног програмирања за подршку одлучивању у рударству у ширем смислу, као и у осталим сличним индустријама.

## 5.2 ПРЕПОРУКЕ

Рударство је свакодневно изложено проблемима доношења одлука и управљања. Резултати постигнути у дисертацији иницирају и упућују на закључке о капацитету за пословну примену овог модела. Предност примене овог модела доказана је не само са економског аспекта, већ и са оперативног.

Добијени резултати подстичу и продубљивање иначе актуелне теме заштите животне средине. Овај прецизно пројектовани модел уз правилно унете податке поседује потенцијал за решавање потреба за отварањем нових каменолома или затварање постојећих на глобалном нивоу

Примена модела такође може утицати значајно на побољшање економских услова рада у рударству, посебно у кризним, ризичним и променљивим ситуацијама.

Даља научна истраживања би требало усмерити у правцу надоградње развијеног модела увођењем додатних критеријума као што су: хемијски састав кречњака или његова физичка и механичка својства, време испоруке и слично и прилагођавањем примене микро и макро условима, не само у рударству већ и у другим индустријама.

# 6. ЛИТЕРАТУРНИ ИЗВОРИ


1. Amankwah H., Mathematical Optimization Models and Methods for Open-Pit Mining, Linköping University, 2011.
2. Andreasson N. , Evgrafov A. , Patriksson M., An Introduction to Optimization: Foundations and Fundamental Algorithms, Chalmers University of Technology Press, 2005.
3. Antunović M., Aitman J., Zekić M.: Optimizacija proizvodnje linearnim programiranjem s osvrtom na radno vrijeme, Ekonomski vjesnik br. 1-2 (10): 75 - 83, 1997.
4. Askari-Nasab H., Upadhyay S. P., Torkamani E., Tabesh M., Badiozamani M.M., Simulation Optimisation of Mine Operational Plans, Orebody Modelling and Strategic Mine Planning Symposium, Perth, WA Australia, 2014.
5. Baek J., Choi Y., Park H., Uncertainty Representation Method for Open Pit Optimization Results Due to Variation in Mineral Prices, Minerals, 2016.
6. Bastani S., Solving Linear and Integer Programs in Matlab, Lund University, Department of Electrical and Information Technology, 2018.
7. Bazaraa M., Jarvis J., Sherali H., Linear Programming and Network Flows, John Wiley & Sons, Inc., 2009.

8. Bixby R., A Brief History of Linear and Mixed-Integer Programming Computation, Documenta Mathematica, Extra Volume ISMP, 2012.

9. Boševski T., Vujić S., Radosavljević M., Kuzmanović M., Linear model of location optimization exploitation and consumption of limestone on the example of Macedonia, No.1, 2019,pp. 97-105.

10. Brickman L., Mathematical Introduction to Linear Programming and Game Theory, Springer-Verlag New York Inc., 1989.

11. Burt C., An Optimisation Approach to Materials Handling in Surface Mines, PHD Thesis, Curtin University of Techology, 2008.

12. Carvalho Jr J. A., Koppe J. C., Costa J. F. C. L., A case study application of linear programming and simulation to mine planning, The Journal of The Southern African Institute of Mining and Metallurgy, 2012.

13. Charles B. Manula, Application of Linear Programming Methods to Mine Planning and Scheduling, Special Research Reports, 1965.

14. Charnes A., Cooper W., Hederson A., Introduction to Linear Programming, J. Wiley, 1953.

15. Црногорац М., Оптимизација избора механичке методе експлоатације нафтних бушотина применом фази логике, Докторска дисертација, Универзитет у Београду, Рударско-геолошки факултет, Београд, 2020.

16. Dantzig G. B., Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, New Jersey, 1963.

17. Dantzig G. B., Thapa M., Linear Programming, 1: Introduction, Springer, 1997.

18. Дедовић Н., Матић-Кекић Снежана, Томић М., Савин Л., Симикић М., Примена линеарног програмирања на проблем локације ремонтних центара, Савремена пољопривредна техника, 2014.

19. Dejanović P., Perić T., Primjena fuzzy višekriterijskog linearnog programiranja u rješavanju problema optimizacije plana proizvodnje i tehnoloških varijanti, Zbornik Ekonomskog fakulteta u Zagrebu, 2019.

20. Dharma S., Ahmad A., Optimization of Transportation Problem with Computer Aided Linear Programming, Proceedings of the Postgraduate Annual Research Seminar, 2005.

21. Dimitrijević B., Procesna analiza i definisanje modela optimizacije, Tehnika – rudarstvo, geologija i metalurgija 66, 2015.

22. Dogbe G., Frimpong S., An Integrated Open Pit Optimization with Material Scheduling, CIM, 2004.

23. Eiselt H. A., Sandbiom C.-L., Decision Analysis, Location Models, and Scheduling Problems, Springer, 2004.

24. Eivazy H.; Askari-Nasab H., A hierarchical open-pit mine production scheduling optimisation model, International Journal of Mining and Mineral Engineering, 2012.

25. Ercelebi, S. G., & Bascetin, A., Optimization of shovel-truck system for surface mining, Journal of The South African Institute of Mining and Metallurgy, 2009.

26. Faraji R., A comparison between linear programming and simulation models for a dispacthing system in open pit mines, Département de mathématiques et de génie industriel, 2013.

27. Ferguson R., Sargent L., Linear Programming: Fundamentals and Applications, McGraw-Hill, 1958.

28. Gamache, M., Hebert-Desgroseilliers, L., & Desaulniers, G.. A generic linear program for an optimal mine production plan, Mining Planning and Equipment Selection Conference, 2009.

29. Gass S., An illustrated guide to linear programming, Dover Publications, Inc, 1990.

30. Gass S., Fu M., Encyclopedia of Operations Research and Management Science, Springer, 2013.

31. Griva I., Nash S., Sofer A., Linear and Nonlinear Optimization, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009.

32. Gurgur, C. Z., Dagdelen, K., & Artittong, S., Optimisation of a real-time multi-period truck dispatching system in mining operations, International Journal of Applied Decision Sciences, 2011.

33. Hadley G., Linear Programming, Addison-Wesley Publishing Company, 1962.

34. Hitchcock F. L., The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities, Journal Math. and Phys. 20, 1941.

35. Hudej M., Multivarijabilni modeli upravljanja u rudarstvu, doktroska disertacija, Beograd, 2013.

36. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г., Линейное программирование, теория и конечные методы, Государственное издательство физико-математической литературы, 1963.

37. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г., Линейное программирование, теория, методы и приложения, Издательство Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1969.

38. Kantorovich L. V., Mathematical Methods of Organizing and Planning Production, 1939.

39. Канторович Л. В., Экономический расчет наилучшего использования ресурсов, Академии наук СССР, 1960.

40. Kawahata K., Dagdelen K., A mixed integer linear programming approach to limestone quarry scheduling optimization with sequencing and blending constraints, SME, 2003.

41. Kazakidis V., Mayer Z., Scoble M.J., Decision making using the analytic hierarchy process in mining engineering, Transactions of the Institution of Mining and Metallurgy, Section A: Mining Technology, 2004.

42. Khan S., Bari A., Khan M., Linear and integer programming, Cambridge Scholars Publishing, 2019.

43. Khan S., Bari A., Khan M.F - Linear and integer programming, 2019.

44. Kolman B., Beck R., Elementary Linear Programming with Applications, Elsevier Science & Technology Books, 1995.

45. Komljenovic D., Abdul-Nour G., Popovic N., An approach for strategic planning and asset management in the mining industry in the context of business and operational complexity, International Journal of Mining and Mineral Engineering, 2015.

46. Koopmans T. C., Optimum Utilization of the Transportation System, Economica, 1949.

47. Llewellyn R., Linear Programming, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1964.

48. Luenberger D., Ye Y., Linear and Nonlinear Programming, Springer, 1973.

49. Mahrous A., Hyung S. Y., Transportation problem: A special case for linear programing problems in mining engineering, International Journal of Mining Science and Technology, Vol. 22, No 3, 2012, pp. 371-377.

50. Matoušek J., Gärtner B., Understanding and Using Linear Programming, Springer, 2006.

51. Meagher C., Dimitrakopoulos R., Avisa D., Optimized Open Pit Mine Design, Pushbacks and the Gap Problem—A Review, Fiziko-Tekhnicheskie Problemy Razrabotki Poleznykh Iskopaemykh, 2014.

52. Moradi-Afrapoli A.; Askari-Nasab H., A stochastic integrated simulation and mixed integer linear programming optimisation framework for truck dispatching problem in surface mines, International Journal of Mining and Mineral Engineering, 2020.

53. Murty K., Optimization for Decision Making, Linear and Quadratic Models, Springer, 2010.

54. Newman A. , Rubio E., Caro R., Weintraub A., Eurek K., A Review of Operations Research in Mine Planning, Informs, 2010.

55. Ordin A., Ordin D., Optimizing the design capacity of a mine under conditions of investment risk, Journal of Mining Science, 2000.

56. Panik M., Linear Programming and Resource Allocation Modeling, John Wiley & Sons, Inc., 2018.

57. Patterson S.R., Kozan E., Hyland P., An integrated model of an open-pit coal mine: improving energy efficiency decisions, International Journal of Production Research, Volume 54, 2016 - Issue 14, 2016.

58. Peng H., Zhou M., Liu M., Zhang H. Y., A dynamic optimization model of an integrated coal supply chain system and its application, Mining Science and Technology 19, 2009.

59. Perišić M., Linearni modeli optimizacije i odlucivanja u rudarstvu, 1986.

60. Petrić J., Šarenac L., Kojić Z., Operaciona Istraživanja I, 1984.

61. Rader D., Deterministic Operations Research: Models and Methods in Linear Optimization, John Wiley & Sons, Inc., 2010.

62. Radosavljvić M., Vujić S., Boševski T., Praštalo Ž., Jovanović B., Single-phase linear model of optimum supply limestone thermal power plants from the quarry of Serbia, Journal of Mining Science, Springer, Vol. 52, No. 4, 2016, pp. 704-711.

63. Rubito, E., Mill feed optimization for multiple processing facilities using integer linear programming, Proceedings of the fifteen international symposium on mine planning and equipment selection, Turin, Italy, 2007.

64. Shishvan M.S., Benndorf J., Operational Decision Support for Material Management in Continuous Mining Systems: From Simulation Concept to Practical Full-Scale Implementations, Minerals, 2017.

65. Sitorus F., Cilliers J., Brito-Parada P., Multi-criteria decision making for the choice problem in mining and mineral processing: Applications and trends, Elsevier Ltd., 2018.

66. Sofranko M., Optimizing Transport in Surface Mines, Taking into Account the Quality of Extracted Raw Ore, Acta Montanistica Slovaca, 2012.

67. Stanojević R., Linearno programiranje, Istitut za ekonomiku industrije, 1966.

68. Станојевић Р., Оптимизациони макроекеономски модели, Веларта, Београд, 2001, 511 стр.

69. Стевановић Д., Оптимизација и планирање површинских копова стохастичким моделима, Докторска дисертација, Универзитет у Београду, Рударско-геолошки факултет, Београд, 2015.

70. Stevanović D., Optimizacija i planiranje površinskih kopova stohastičkim modelima, doktorska disertacija, Beograd, 2015.

71. Sule D., Logistics of facility location and allocation, Marcel Dekker, Inc, 2001.

72. Swain A., Application of Linear Programming in Mine Systems Optimization, Mine Systems Engineering, 2016.

73. Ta C.H., Ingolfsson A., Doucette J., A linear model for surface mining haul truck allocation incorporating shovel idle probabilities, European Journal of Operational Research, Volume 231, Issue 3, 2013.

74. Tabesh, M., Mieth, C., and Askari–Nasab, H., A multi–step approach to long–term open–pit production planning, International Journal of Mining and Mineral Engineering, 2014.

75. Темовски М., Површинска распространетост на карстните карпи во Република Македонија, Географски разгледи, 2012.

76. Topal E., Kuchta M., Newman A., Extensions to an efficient optimization model for long-term production planning at LKAB's Kiruna Mine, Application of Computers and Operations Research in the Minerals Industries, South African Institute of Mining and Metallurgy, 2003.

77. Van der Lingen E., Outsourcing in the mining industry: Decision making framework and critical success factors, Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy, 2014.

78. Van der Veen B., Introduction to the theory of operational research, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1967.

79. Vanderbei R., Linear Programming: Foundations and Extensions Fifht Edition, Springer, 2020.

80. Vujić S., A comparative multi-criterion analysis of possible technologies used for selective mining, conveyance and dumping of solum at coal open pit mines of the Electric power industry of Serbia, Annual of University of Mining and geology "St. Ivan Rilski", Part II: Mining and mineral processing, Vol. 47, Sofia, Bulgaria, ISSN 1312-1820, 2004, (197-200).

81. Vujić S., Benović T., Miljanović I., Hudej M., Milutinović A., Pavlović P., Fuzzy linear model of production optimization of mining systems with multiple entities, International Journal of Minerals, Metallurgy and Materials, University of Sicence and Technology Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Vol. 18, No. 6, 2011, pp. 633-637.

82. Vujić S., Ćirović G., Production planning in mines using fuzzy linear programming, Yugoslav Journal of Operations Research - YUJOR, Vol. 6, No. 2, 1996, pp. 205-215.

83. Vujić S., Location-allocation multi-criterion analysis of optimum distribution of facilities for mineral procesing, Proceedings of Xth Mineral Processing Simposium - Challenges and Opportunities in Mineral Processing, Cesme-Ismir, Turkey, 2004, pp. 853-862.

84. Vujić S., Miljanović I., Kuzmanović M., Bartulović Z., Gajić G., Lazić P., The deterministic fuzzy linear approach in planning the production of mine system with several open pits, Archives of Mining Sciences, Polish Academy of Sciences, Committee of Mining, Krakow, Vol. 56, No. 3, 2011, pp. 489-497.

85. Vujić S., Radević V., Simić R., Optimizacija proizvodnje grupe površinskih kopova linearnim programiranjem - Zbornik radova II Jugoslovenskog simpozijuma o površinskoj eksploataciji, Tuzla, 1975.

86. Vujić S., Radević V., Simić R., Rešavanje problema homogenizacije rude primenom linearnog programiranja - Oktobarsko savetovanje rudara i metalurga, Bor, 1975, str. 57-65..

87. Вујић С., Ивић А., Математичке методе у рударству и геологији - теорија и примена, Рударско-геолошки факултет Универзитета у Беогарду, 1991.

88. Вујић С., Оптимизација технолошких процеса у површинској експлоатацији применом линерарног програмирања, Универзитет у Београду Рударско-геолошки факултет, 1976. магистарски рад

89. Вујић С., Пројектовање рудника са површинском експлоатацијом: Поглавље 5 Квантитативне методе за подршку одлучивању у планирању и пројектовању рудника, радни материјал, 2019.

90. Вујић С., Радевић В., Методе оптимизације - примена линеарног програмирања у површинској експлоатацији, Универзитет у Београду Рударско-геолошки факултет, 1976, 85 стр.

91. Weintraub A., Epstein R., Bjorndal T., López C. R., Miranda J., Handbook of Operations Research in Natural Resources, Springer US, 2007.

92. Winston W., Operations Research: Applications and Algorithms, International Thompson Publishing, 1994.

# **БИОГРАФИЈА**

Трајче С. Бошевски, дипл. инж. рударства, је рођен 2. октобра 1987. године у Скопљу, Македонија. Основну школу и гимназију је завршио у Скопљу.

Основне студије на Факултету природних и техничких наука, Универзитета „Гоце Делчев“ у Штипу уписао је 2006. године, студијски програм рударство, Катедра површинска експлоатација, смер пројектовање и менаџмент. Студије је завршио са просечном оценом 9,38, а дипломски рад под називом „Избор и начин проширења површинског копа „Бразда“ – Скопље“, је одбранио 2010. године, са оценом 10.

Мастер рад под називом „Обједињени систем даљинског надзора и управљања површинских копова РЕК „Битољ“ је одбранио 2012. године на Рударско-геолошком факултету, Универзитета у Београду. Од 2013. године је студент докторских студија на Рударско-геолошком факултету, на студијском програму Рударско инжењерство.

Почетком 2011. године запошљава се у фирми „Рудпроект“ у Скопљу као пројектант, а касније постаје управник исте. На тој позицији је и данас.

Као главни пројектант израдио је више од 50 Главних рударских пројеката из области површинске експлоатације минералних сировина, научних студија и елабората, као аутор и коаутор објавио је 12 научних радова публикованих у часописима или презентованих на научним и стручним скуповима. Учесник је већег броја саветовања и семинара из области површинске експлоатације организованих у Републици Македонији.

# Изјава о ауторству

Име и презиме аутора: Трајче С. Бошевски

Број индекса: Р702/13

**Изјављујем**

да је докторска дисертација под насловом

ПОБОЉШАЊЕ ЕФИКАСНОСТИ ОДЛУЧИВАЊА У РУДАРСТВУ ПРИМЕНОМ ЛИНЕАРНИХ ОПТИМИЗАЦИОНИХ МОДЕЛА

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

У Београду, 07.06.2021. год.

Потпис аутора

______________________________

## Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

| | |
|---|---|
| Име и презиме аутора: | Трајче С. Бошевски |
| Број индекса | Р702/13 |
| Студијски програм: | Рударско инжењерство |
| Наслов рада: | Побољшање ефикасности одлучивања у рударству применом линеарних оптимизационих модела |
| Ментор: | др Игор Миљановић, ред. проф. |

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао ради похрањивања у **Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

У Београду, 07.06.2021. год.

Потпис аутора

_____________________________

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

ПОБОЉШАЊЕ ЕФИКАСНОСТИ ОДЛУЧИВАЊА У РУДАРСТВУ ПРИМЕНОМ

ЛИНЕАРНИХ ОПТИМИЗАЦИОНИХ МОДЕЛА

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио.

1. Ауторство (CC BY)

2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)

3. Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY-NC-ND)

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)

5. Ауторство – без прерада (CC BY-ND)

6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци. Кратак опис лиценци је саставни део ове изјаве).

У Београду, 07.06.2021. год.

Потпис аутора

______________________________

1. **Ауторство.** Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. **Ауторство – некомерцијално.** Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. **Ауторство – некомерцијално – без прерада.** Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. **Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима.** Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. **Ауторство – без прерада.** Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. **Ауторство – делити под истим условима.** Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.